Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Condicions suficients per equilibri de Nash i models de diferenciació espacial

Autor: Pol Paniagua Seriols

Director: Dr. Xavier Jarque i Ribera
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de gener de 2020

Abstract

The Cournot competition model created in 1838 is the predecesor of the application of game theory to find equilibrium conditions for the competition. This work starts with the concepts of game theory developed during the twentieth century to be able to study spatial competition models of Hotelling's type and several dimensions.

An equilibrium existence theorem for n-dimensional models with any m firms will be presented. This theorem was proposed by Caplin and Nalebuff in 1991 and we will detail the formal proof to show the relation between the assumptions made in the model and the final result.

These results will be used to find an equilibrium in a specific model of spatial competition in two dimensions.

Resum

El model de competició d'empreses ideat el 1838 per Cournot és el predecessor de l'aplicació de la teoria de jocs per trobar unes condicions d'equilibri de la competició. Aquest treball parteix dels conceptes de la teoria de jocs desenvolupats al segle XX per arribar a estudiar models de competició espacial de tipus Hotelling en diverses dimensions.

Es presentarà un teorema d'existència d'equilibri de Nash en models n-dimensionals amb diverses empreses plantejat per Caplin i Nalebuff el 1991, junt amb la demostració formal per veure quin significat tenen les condicions que ha de reunir un model per poder-se aplicar aquest resultat.

Amb aquests resultats es trobarà l'equilibri d'un model concret de competició espacial de dues dimensions.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A10, 91A80, 91B72

Agraïments

Vull agrair al meu tutor Xavier Jarque pel seu consell i ajuda a l'hora d'enfrontar els conceptes més teòrics. També vull mostrar gratitud a la meva família i amics, i especialment al meu pare per la seva disposició a enfrontar-se amb la dialèctica matemàtica per a ajudar-me.

Índex

1 Introducció

Al llarg dels meus estudis el contacte amb la teoria de jocs i les matemàtiques aplicades a l'economia ha estat bastant escàs. La tria d'aquest treball prové d'un interès en ampliar els meus coneixements sobre aquesta branca de les matemàtiques, que té aplicacions molt directes i diverses.

El concepte del joc s'ha estudiat extensivament al llarg de la història en contextos tant matemàtics com econòmics. En aquest treball s'explicarà què és un joc per després anar veient les seves propietats i acostar-se progressivament als models de competició d'empreses.

La primera part del treball és una presentació de la teoria de jocs en un context històric. S'introduiran els conceptes bàsics de la teoria i ens centrarem en els jocs no cooperatius. Aquesta és la branca de la teoria de jocs que més va desenvolupar John Nash i és el context on va demostrar l'existència del l'equilibri que porta el seu nom. Es veuran les propietats dels jocs per etapes i, prèviament a introduir el model de Hotelling, es farà un anàlisi breu d'un dels models clàssics com és el model de Bertrand.

Començarem l'estudi de models econòmics de dues etapes; tria de posició i tria de preus, amb el model lineal de Hotelling. Trobarem les condicions necessàries per a l'existència d'un equilibri de Nash i veurem que canviant el cost de transport lineal per un de quadràtic s'elimina la necessitat d'aquestes condicions.

La part central del treball es basa en l'estudi de l'article de Caplin i Nalebuff amb l'objectiu de demostrar l'existència d'un equilibri de Nash sota dues suposicions, una sobre la funció d'utilitat i l'altra sobre la distribució dels consumidors. Es farà una explicació pas per pas de la demostració i dels resultats previs que es necessiten, veient la connexió entre aquestes suposicions i l'existència d'equilibri.

Per finalitzar, analitzarem un model de tipus Hotelling en dues dimensions que compleix les dues suposicions i obtindrem el seu equilibri de Nash.

2 Introducció a la teoria de jocs

La teoria de jocs és una eina molt versàtil que estudia els models matemàtics que descriuen la interacció entre jugadors, on un jugador és una entitat racional amb capacitat de decisió i un objectiu definit. Molt abans que la teoria s'utilitzés amb rigor matemàtic científics i no científics s'havien plantejat trobar una explicació a la tria de decisions de les persones. Sovint això esdevé una empresa molt difícil per el gran nombre de variables a tenir en compte, però, en situacions prou restringides, es pot fer un estudi d'uns jugadors que, presentada una situació, han de triar la millor estratègia per assolir els seus objectius.

Els principals precursors de la teoria de jocs pertanyen, sobretot, a l'àmbit econòmic. Això es degut a que molts problemes econòmics es poden explicar com interaccions entre jugadors, que poden ser empreses o particulars i l'objectiu d'aquests esdevé guanyar diners o gastar-ne el mínim per aconseguir una altra cosa. És al segle XIX quan apareixen dos dels autors més importants en aquesta matèria. Antoine Augustin Cournot és considerat el primer a presentar una solució al problema de maximitzar el benefici per dues empreses que competeixen en la mateixa àrea de negoci; és a dir un duopoli. En la seva obra de 1838 ≪Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses≫ [3] estudia un model de joc de dues empreses que competeixen pel mateix mercat; per exemple, aigua mineral. En el seu estudi, Cournot construeix funcions de benefici per a cada empresa que depenen de la quantitat de bé produït per ambdues. A més, obté el màxim de les funcions de benefici amb l'objectiu de trobar un equilibri tal que les dues empreses puguin afirmar que la seva tria ha estat la millor possible. El 1883, Joseph Louis François Bertrand publica una revisió [4] del model de Cournot que canvia la competició en quantitat per la competició en preus. Les empreses llavors trien els preus simultàniament i, observant com queda el mercat després de la primera tria, fan modificacions del preu per tal d'arribar al punt més satisfactori per ambdues.

En el segle següent el teorema enunciat per Ernst Zermelo el 1913 [7] dóna unes condicions que asseguren l'existència d'una estratègia guanyadora en un joc finit de dos jugadors. Aquest ha estat considerat per alguns com el primer teorema formal de la teoria de jocs. El 1929 Harold Hotelling [2] publica el seu model lineal de competició entre dues empreses, que es tractarà en detall en una secció posterior. Uns anys després John von Neumann i Oskar Morgenstern van establir les bases de la teoria de jocs i van publicar el 1944 el llibre ≪*Theory of Games and Economic Behaviour*≫ [8]. Aquest llibre, que formalitzava l'estratègia militar com un joc no cooperatiu amb dos agents i suma zero —joc on el que guanya un jugador ho perd l'altre— va acabar sent un dels fonaments sobre el que es construiria la teoria de jocs moderna. A més, va obrir les portes perquè s'extengués l'us de la teoria més enllà de l'economia, com per exemple, a la sociologia. Tot i els avenços de Neumann i Morgenstern, es troben amb dificultats a l'hora de definir la solució d'un joc.

Alumne de von Neumann i, gràcies a l'influència d'aquest, John Forbes Nash es va interessar en la teoria de jocs i va fer la seva tesi doctoral titulada *Non-cooperative Games*

[9] que va defensar el 1950. A continuació va aprofundir sobre la seva feina i, més d'un segle després que Cournot definís l'equilibri per al seu model, va generalitzar aquest concepte en el que ara es coneix com «equilibri de Nash». Aquesta no va ser l'única contribució de Nash a la teoria de jocs, ja que també va publicar *The bargaining problem* on va donar una solució general pels problemes on diferents agents poden cooperar per arribar a un acord que els beneficiï. La seva investigació i la seva etapa com a professor al MIT de Cambridge (Massachusets) es van veure truncades per la esquizofrènia que, a partir del 1959 i durant més de vint anys el va apartar del món acadèmic. Durant aquesta etapa Nash va rebre tractament i va iniciar una lenta recuperació. L'obra de Nash seria reconeguda en forma de diferents premis, destacant el premi de teoria de John von Neumann (1978), el premi Nobel en ciències econòmiques (1994) junt amb John Harsanyi i Reinhard Selten, i el premi Abel (2015) per la seva trajectòria i les seves aportacions a les matemàtiques.

2.1 El joc no cooperatiu

Per al propòsit d'aquest treball, es tractarà la teoria de jocs no cooperatius que és la que s'aplica als models econòmics que tractarem més endavant. Agafant la definició de joc de l'article de Jordi Massó sobre l'obra de Nash [5], un joc no cooperatiu és un model abstracte que descriu una situació d'interacció estratègica entre dos o més agents. Un joc d'aquest tipus ha de tenir els següents elements:

- Un conjunt $N = \{1, ..., n\}$ de n agents que han de prendre decisions i que s'anomenaran *jugadors*.
- Cada jugador $i \in N$ ha de triar una *estratègia* s_i del seu conjunt d'estratègies S_i. Un *perfil d'estratègies* $s = (s_1, ..., s_n) \in S = S_1 \times ... \times S_n$ descriu l'estratègia triada per cadascun dels jugadors. Depenent de la interacció entre els jugadors, les estratègies hauran de tenir en compte les accions dels altres jugadors perquè el resultat final dependrà de les accions de tots els jugadors.

Si Z és el conjunt de resultats possibles del joc i $g : S \to Z$ és la funció que indica, per a cada perfil d'estratègies s, el resultat del joc $g(s) \in Z$. Suposem que els jugadors estan interessants en el resultat final i no en etapes intermèdies ni com es produeix aquest resultat. Els jugadors poden tenir preferències sobre els resultats del joc que, a través de g, són preferències sobre el perfil d'estratègies. Suposem que les preferències d'un jugador qualsevol i venen representades per una *funció d'utilitat* $u_i : Z \to \mathbb{R}$ que estableix una relació d'ordre per tots els elements $z, z' \in Z$ de manera que $u_i(z) > u_i(z')$ si i només si i prefereix estrictament el resultat z al z'. La funció d'utilitat és una mesura del grau de satisfacció d'un consumidor respecte un bé concret. Les funcions d'utilitat adquireixen significat quan es comparen dues funcions d'utilitat d'un consumidor per a dos béns diferents. Llavors la *funció de pagaments* $h_i : S \to \mathbb{R}$ del jugador i, ordena el conjunt de perfils d'estratègies d'acord amb la funció d'utilitat i assigna $\forall s \in S$, la utilitat del resultat generat per s: $h_i(s) = u_i(g(s))$.

- La funció de pagaments $h : S \to \mathbb{R}^n$ dóna per a cada perfil d'estratègies s, el vector de pagaments $(h_1(s), ..., h_n(s))$ que obtenen els jugadors si cada un tria el corresponent component del perfil d'estratègies $s = (s_1, ..., s_n) \in S$.

Finalment, un joc no cooperatiu en forma normal és un triplet $G = (N, S, h)$.

Hi ha dues maneres de classificar aquests jocs. La primera és en funció del coneixement que els jugadors tenen sobre les accions dels altres:

- *Jocs amb informació completa*: els jugadors poden calcular els pagaments de tots els jugadors a partir d'un perfil d'estratègies.

- *Jocs amb informació incompleta*: els jugadors no saben amb certesa el joc que estan jugant o no poden calcular els pagaments dels altres jugadors a partir d'un perfil d'estratègies.

Una segona classificació és basa en l'esquema temporal de la tria d'estratègies:

- *Jocs simultanis*: la tria d'estratègies es fa simultàniament, hi hagi una o més etapes, la qual cosa implica que els jugadors no sabran l'estratègia triada pels altres fins a haver fet la seva tria. Els models de competició d'empreses que es tractaran més endavant entren en aquesta categoria.

- *Jocs seqüencials*: es desenvolupa per torns i a cada pas els jugadors tenen informació sobre les accions dels altres i trien d'acord a aquesta informació. És el cas de jocs de taula com els escacs i les dames.

Exemple 2.1. Siguin a i b dos jugadors $N = \{a, b\}$. Han quedat un dia per anar al cinema a veure una pel·lícula però encara no han triat quina aniran a veure. El jugador a prefereix anar a veure una pel·lícula de génere romàntic i b prefereix una d'acció. D'altra banda ambdós jugadors prefereixen anar junts al cinema que anar pel seu compte. A més com que tractem jocs no cooperatius, descartem la possibilitat d'un pacte entre els dos jugadors i per tant la tria de la pel·lícula la faran sense saber quina tria fa l'altre jugador. Les estratègies dels jugadors són els dos films que poden anar a veure: $s_1 = R$, $s_2 = A$, on R i A significa anar a veure la pel·lícula romàntica i la d'acció respectivament. Es defineixen les funcions de pagaments de cada jugador en funció dels resultats possibles $h_a(R, R) = h_b(A, A) = 4$, $h_a(A, A) = h_b(R, R) = 3$, $h_a(R, A) = h_b(R, A) = 2$, $h_a(A, R) = h_b(A, R) = 0$. Veiem que el nombre que assignem a cada funció de pagaments és la funció d'utilitat del jugador per a un resultat concret i aquesta utilitat representa la satisfacció del jugador envers el resultat del joc. En jocs prous senzills es representa la funció de pagaments en una bimatriu com es mostra en la taula 1. Cada element de la bimatriu dóna la utilitat dels dos jugadors pel resultat que s'esdevé de les estratègies triades.

En aquest joc s'observa clarament com la decisió d'un jugador afecta al resultat dels dos jugadors i, per tant, les decisions que prendran hauran de tenir en compte aquest

Taula 1: Matriu que representa el joc d'anar al cinema en forma normal.

a, b	A	R
A	$(3, 4)$	$(0, 0)$
R	$(2, 2)$	$(4, 3)$

fet. En jocs amb un nombre finit de jugadors i estratègies es pot estudiar cada cas individualment per trobar l'estratègia òptima per a cada jugador.

Aquesta solució no és trivial i pot ser que no existeixi en alguns casos. Els intents de determinar una estratègia òptima per part de Neumann i Morgenstern es van limitar als jocs de suma zero, on el que guanya un jugador ho perd l'altre. Nash va formalitzar el concepte de solució d'un joc i en va demostrar l'existència per a un cas bastant general.

2.2 Equilibri de Nash

El següent pas, una vegada definit el joc, és mirar de trobar un resultat ideal per a tots els jugadors, que també es coneix com «una solució al problema». Estudiant els resultats obtinguts a partir del perfil d'estratègies es pot determinar la millor estratègia per a un jugador tenint en compte quina serà la que comporta una major utilitat per a totes les estratègies dels altres jugadors.

Donat un joc en forma normal $G = (N, S, h)$ una estratègia $s_i^* \in S_i$ es diu *dominant* si és millor que qualsevol altra estratègia s_i per a totes les combinacions possibles d'estratègies dels altres jugadors.

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}\right)\ \forall s_i \in S_i$$

on $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ es refereix a les estratègies de tots els jugadors excepte i, i $S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$ és el conjunt d'estratègies de tots els jugadors excepte i.

Tornant doncs a l'exemple de la parella que va al cinema podem mirar si hi ha una estratègia dominant per cada jugador. Amb la bimatriu de la taula 1 s'identifica ràpidament quines estratègies poden ser les dominants agafant els números més grans. Per al jugador a el resultat òptim és (R, R), que ambdós vagin a veure la pel·lícula romàntica, ja que maximitza la seva utilitat $u_a(R, R) = 4$. Llavors si suposem que a tria R com a la seva estratègia els resultats possibles són (R, R) i (R, A) on resulta que si el jugador b tria A, l'estratègia de a deixa de ser òptima perquè $u_a(R, A) < u_a(A, A)$ per tant, l'estratègia no és dominant.

De fet, en aquest exemple no existeix una estratègia dominant per cap jugador, en canvi si que existeix un equilibri de Nash. Aquest no demana que l'estratègia sigui dominant sinò que sigui la millor donades les estratègies dels altres jugadors. Com que quan a tria R, la millor estratègia de b és triar R i quan b tria R, la millor estratègia de a és triar R, el parell d'estratègies (R, R) és un equilibri de Nash. Amb el mateix raonament, (A, A) també és un equilibri de Nash. Formalment

Definició 2.2. *Sigui $G = (N, S, h)$ un joc en forma normal. Un perfil d'estratègies $s^* \in S$ és un equilibri de Nash de G si per a tot $i \in N$,*

$$h_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq h_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)\ \forall s_i \in S_i \tag{2.1}$$

Es pot dir que la contribució més important de Nash a la teoria de jocs és la formulació de la solució d'un joc no cooperatiu com un equilibri, un equilibri que depèn de tots els jugadors i respresentarà un estat on tots els jugadors estaràn satisfets amb la seva estratègia. S'ha de mencionar que per demostrar l'existència d'aquest equilibri, Nash utilitza l'extensió mixta dels jocs normals on es considera que poden ser una distribució de probabilitats sobre el perfil d'estratègies. Per tant, donat un joc qualsevol, no tenim cap garantia que existeixi un equilibri d'estratègies pures (no mixtes).

Així com en l'exemple 2.1 l'equilibri de Nash es correspon amb les estratègies que aporten més utilitat al conjunt de jugadors, hi ha un exemple clàssic de teoria de jocs ideat per Merril Flood i Melvin Dresher i formalitzat per Albert W. Tucker que s'anomena el dilema del presoner. L'interès d'aquest joc que és mostrar una sitaució on dos agents poden triar un resultat menys favorable de forma lògica encara que si cooperessin arribarien al millor resultat possible.

Exemple 2.3. El dilema del presoner es presenta com una situació on dos sospitosos, membres d'una banda criminal són arrestats i empresonats per la policia pel crim de robar un banc. Durant la seva estada a la preso prèvia al judici no es permet la comunicació entre els detinguts per evitar que posin en comú la seva versió dels fets.

Per a realitzar l'acusació amb garanties suficients, la fiscalía ha d'interrogar els dos sospitosos per tal d'aconseguir que confessin o, més aviat, que es delatin entre ells. En cas que no confessin, també hi hauria una condemna però no per robatori al banc sinò per desordre públic, que seria molt més lleu i en cas que un calli i l'altre el delati, el delator quedaria en llibertat per la seva colaboració amb la justícia.

Això es tradueix en una bimatriu simètrica —ja que els dos jugadors són iguals— que reuneix les funcions de pagaments dels dos jugadors i els nombres representen els anys de presó als que seran condemnats en funció de les seves estratègies (veure la taula 2). Els anys apareixen en negatiu perquè la funció de pagaments dóna la utilitat i es raonable suposar que l'objectiu dels jugadors es passar tants pocs anys a la presó com els sigui possible. Continuem doncs buscant un equilibri de Nash per aquest joc, aquesta vegada però ho farem d'una manera diferent: si agafem el punt de vista del jugador a, començarem estudiant les possibles opcions del jugador b i determinant la millor estratègia per a en cada cas.

Assignant a un jugador les estratègies que maximitzen la seva utilitat fixades les estratègies dels altres jugadors estem definint la correspondència de la millor resposta.

Taula 2: Matriu que representa el joc del dilema del presoner en forma normal.

a, b	calla	delata
calla	$(-2, -2)$	$(-10, 0)$
delata	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

Aquesta correspondència resulta essencial en la demostració de l'existència d'un equilibri de Nash en jocs no cooperatius.

L'estudi de les estratègies que són la millor resposta a les accions dels altres jugadors ens porten a l'equilibri de Nash ja que si trobem un conjunt d'estratègies que són la millor resposta respecte elles mateixes, constituiran un equilibri de Nash. Per aplicar això al dilema del presoner el jugador a s'ha de plantejar quina és la seva millor estratègia quan b el delata i quan no ho fa.

Si el delatés els dos resultats possibles són: a calla, a delata, que suposen uns pagaments

$$h_a\,(calla, delata) = -10$$
$$h_a\,(delata, delata) = -8$$

és a dir que si el jugador b ha delatat el jugador a la millor resposta de a serà delatar-lo també perquè li suposarà dos anys menys de presó.

Si el jugador b calla llavors els pagaments en funció de la resposta de a són

$$h_a\,(calla, calla) = -2$$
$$h_a\,(delata, calla) = 0$$

i de nou la millor resposta és delatar-lo perquè s'estalviarà dos anys de presó.

L'estratègia de delatar és doncs la millor resposta per a les dues possibles estratègies de l'altre jugador. Com que els dos jugadors estan en la mateixa posició, el problema és simètric i el jugador b arriba a les mateixes conclusions que a. Això mostra que la parella d'estratègies $(delatar, delatar)$ és un equilibri de Nash del joc. Mirant la bimatriu, pot estranyar que l'equilibri de Nash sigui precisament la parella d'estratègies que porten a la condena més llarga si es sumen les dels dos criminals i això és precisament l'essència del problema que ensenya com la no cooperació pot portar a un resultat poc desitjat.

2.3 Jocs per etapes

Havent definit els jocs i l'equilibri de Nash, veiem a continuació els jocs per etapes, categoria en la que entraran els models econòmics que es veuran posteriorment. En la definició de joc s'ha explicat com hi ha una classificació en funció de si les tries d'estratègies són simultànies o seqüencials. A més d'això els jocs es poden diferenciar

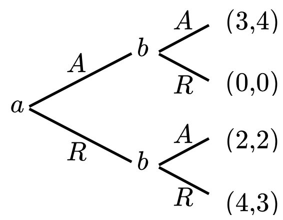

Figura 1: Arbre del joc seqüencial d'anar al cinema.

pel nombre d'etapes. Els exemples vists eren jocs d'una etapa i els models de competició d'empreses poden constar d'una o més etapes. És precisament per a aquests models que el procediment habitual a l'hora d'obtenir la solució és l'inducció cap enrere. Aquest és el procès d'analitzar el joc començant pel final i reculant fins a arribar a l'inici, seleccionant a cada etapa les estratègies de millor resposta. El motiu principal de l'ús d'aquest mètode és que, en afegir etapes a un joc, el conjunt d'estratègies creix exponencialment i fa inviable un estudi com el del exemple 2.1.

Si convertim l'exemple de la parella que va el cinema en un joc de dues etapes seqüencials on primer tria a la seva estratègia i després b fa la seva tria amb la informació del que ha fet a. Amb les funcions de pagaments definides en la taula 1, el fet que hi hagi dues etapes dóna lloc a una diferent representació en forma d'arbre («forma extensiva») que mostra gràficament les etapes i les estratègies possibles (veure figura 1).

S'observa que els resultats possibles són els mateixos perquè tot i haver canviat l'esquema temporal, les estratègies són les mateixes. Passem a buscar l'equilibri de Nash mitjançant la inducció cap enrere:

1. En la segona etapa el jugador b tria la seva estratègia sabent la tria del jugador a, llavors si a ha triat anar a veure una pel·lícula d'acció la utilitat de b pot ser $u_b(A,A) = 4$, $u_b(A,R) = 0$. Si a tria la romàntica llavors $u_b(R,A) = 2$, $u_b(R,R) = 3$, ens quedem doncs amb la millor estratègia de resposta per a cada cas i passem a la primera etapa.

2. En la primera etapa el jugador a tria la pel·lícula sabent que b escollirà la millor resposta i per tant només considera els resultats identificats en el primer pas. En funció de la seva tria, la utilitat de a serà $u_a(A,A) = 3$, $u_a(R,R) = 4$. És a dir que a no tindrà cap dubte per triar la seva estratègia, ja que anar a veure una pel·lícula romàntica li suposarà la màxima utilitat.

L'equilibri de Nash és doncs (R,R), en canvi (A,A) passa a no ser un equilibri de Nash perquè ,en haver-hi dues etapes, l'estratègia R per al jugador a li proporciona una utilitat estrictament superior a l'estratègia A.

Taula 3: Matriu que representa el joc de comprar crispetes en forma normal.

a, b	C	N
C	$(4, 4)$	$(2, 0)$
N	$(0, 2)$	$(1, 1)$

Podem ampliar i modificar l'exemple anterior per convertir-lo en un joc de dues etapes on els jugadors trien estratègies de manera simultània. Fem que la primera etapa sigui la ja plantejada en l'exemple 2.1 i afegim una segona etapa que consisteix en la tria de menjar o no menjar crispetes. Suposarem que els jugadors valoren positivament i de la mateixa manera menjar crispetes i que en el cas en què un en mengi i l'altre no, aquest tindrà un mica d'enveja. Traduïm aquestes preferències en una bimatriu amb els pagaments del joc, com si només fos la segona etapa (veure la taula 3). La combinació de les dues bimatrius donarà els pagaments al final del joc sumant els pagaments de cada etapa. Cada etapa amb la seva tria de decisions s'anomena ≪subjoc≫ si compleix unes certes característiques:

- té un únic node inicial,
- conté tots els nodes posteriors,
- si conté un node que constitueix un conjunt d'informació, llavors també ha de contenir els altres nodes que formen el conjunt d'informació.

Un conjunt d'informació s'indica en el joc amb una línia de punts i dóna, per a un jugador concret, els possibles resultats que podrien haver passat en el moment que ha de triar la seva estratègia. És necessari l'ús d'aquests conjunts per a la representació del joc en forma d'arbre quan el joc és d'informació incompleta o hi ha simultaneïtat. L'arbre representat en la figura 2 mostra que la tria simultània de a i b és equivalent a que primer un jugador triés la seva estratègia i el segon hagués de respondre sense saber la tria del primer. En l'arbre s'ha definit amb C l'estratègia de menjar crispetes i amb N la de no menjar-ne.

Passem a buscar un equilibri de Nash amb la inducció cap enrere sense oblidar que les tries d'estratègies succeeixen simultàniament.

1. Sabent ja com es defineixen els subjocs, observem que hi ha 4 subjocs diferents que es poden escriure en forma normal:

   (a) subjoc 1:

a, b	C	N
C	$(7, 8)$	$(5, 4)$
N	$(3, 6)$	$(4, 5)$

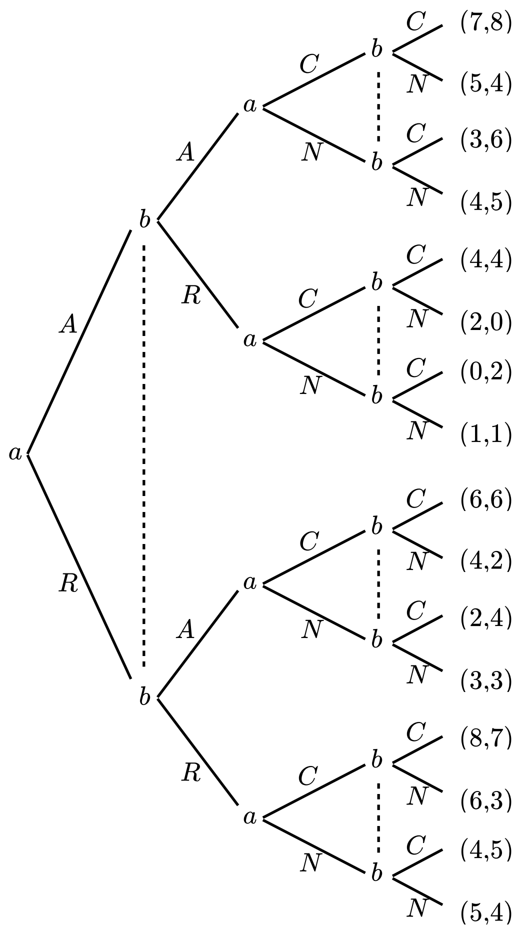

Figura 2: Arbre del joc simultani per etapes d'anar al cinema i menjar crispetes.

(b) subjoc 2:

a,b	C	N
C	$(4,4)$	$(2,0)$
N	$(0,2)$	$(1,1)$

(c) subjoc 3:

a,b	C	N
C	$(6,6)$	$(4,2)$
N	$(2,4)$	$(3,3)$

(d) subjoc 4:

a,b	C	N
C	$(8,7)$	$(6,3)$
N	$(4,5)$	$(5,4)$

2. Per a cada subjoc estudiem l'equilibri buscant l'estratègia de millor resposta.

   (a) En el subjoc 1 estudiem la utilitat del jugador a en funció de l'estratègia de b. Si b tria C veiem que $u_a\,(C,C) = 7 > u_a\,(N,C) = 3$, si tria N $u_a\,(C,N) = 5 > u_a\,(N,N) = 4$; així doncs l'estratègia C per a és la millor resposta per qualsevol estratègia de b i, per tant, també és una estratègia dominant. Llavors des del punt de vista de b, $u_b\,(C,C) = 8 > u_b\,(C,N) = 4$ i $u_b\,(N,C) = 6 > u_b\,(N,N) = 5$, la qual cosa indica que C és també una estratègia dominant per a b. Per tant (C,C) són estratègies de millor resposta i formen un equilibri de Nash amb pagaments $(7,8)$.

   (b) Observem que els subjocs 2 i 3 són equivalents perquè els pagaments són els mateixos més una constant. En aquests subjocs el raonament per trobar equilibri és el mateix que en el subjoc 1, ja que els màxims de les funcions d'utilitat es donen tant per a com per b en el cas (C,C); això indica que és un equilibri de Nash. Els pagaments són $(4,4)$ i $(6,6)$ respectivament.

   (c) El subjoc 4 és el mateix que el subjoc 1 però amb els jugadors intercanviats, l'equilibri doncs serà el mateix però amb les utilitats de cada jugador també intercanviades, que resulta en uns pagaments de $(8,7)$.

3. Havent trobat els equilibris dels subjocs podem simplificar l'arbre substituint cada subjoc per l'equilibri trobat. El joc restant és un joc que es pot respresentar en forma normal:

a,b	A	R
A	$(7,8)$	$(4,4)$
R	$(6,6)$	$(8,7)$

i que té dos equilibris de Nash perquè, com hem vist en l'exemple 2.1, (A,A) i (R,R) són estratègies de millor resposta per als dos jugadors i formen uns equilibris dels quals els jugadors no es voldran moure. Amb això hem trobat la solució del joc de dues etapes amb tries simultànies. Els equilibris venen donats per les estratègies $[(A, C), (A, C)]$, on el primer parèntesi són les estratègies del jugador a i el segon les estratègies del jugador b, amb pagaments $(7, 8)$ i $[(R, C), (R, C)]$ amb pagaments $(8, 7)$.

2.4 Model de Bertrand

El model de Bertrand és una revisió del model de Cournot que, al seu torn, és un model de competició imperfecta; específicament un duopoli. Com que només hi ha dues empreses, les accions d'aquestes tenen una afectació important sobre el mercat (aquesta afectació és la que trenca la competició perfecta). En el model de Cournot les dues empreses estan en un mercat limitat i han de fer una tria simultània de quina quantitat del seu bé produiran; llavors això determinarà els seus beneficis.

La revisió de Bertrand passa per canviar la competició de quantitats en una competició de preus de manera que els consumidors compraran el bé que tingui un preu inferior perquè els béns de les empreses són iguals. Es suposa que el cost de producció c dels béns és constant i igual per a les dues empreses i que, en cas que les empreses posin el mateix preu, el mercat quedarà dividit en dues meitats iguals.

$$D_A(p_A, p_B) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_A > p_B \\ D(p_A) & \text{si } p_A < p_B \\ \frac{D(p_A)}{2} & \text{si } p_A = p_B \end{cases}$$

$D_A(p_A, p_B)$ és la funció de demanda de l'empresa A i dóna els consumidors que compraran el bé d'A. $D(p_A)$ és la demanda en el cas on només hi ha l'empresa A, llavors hi ha un monopoli i tots els consumidors compren a A,que acapara el total del mercat.

L'equilibri d'aquest model es dóna quan les empreses redueixen el preu fins al cost de producció. En aquesta situació el mercat queda dividit en dos trossos i, encara que el benefici sigui zero (si es ven al cost de producció el benefici és zero), les empreses no estan motivades a canviar de preu. Veiem que en el cas que posessin un mateix preu superior al cost de producció les empreses tendirien a rebaixar mínimament el seu preu per tal de gairebé duplicar la seva demanda i no hi hauria equilibri. Amb preus $p_A = p_B = c$ s'elimina aquest cas perquè baixar el preu per sota el cost de producció significaria un benefici negatiu. Tampoc milloraria la situació si una empresa intentés pujar el preu perquè passaria a tenir un preu superior a l'altra empresa i seguiria amb benefici zero.

Aquest punt és un equilibri de Nash i, en el context del model de Bertrand, a vegades s'anomena «equilibri de Bertrand-Nash». La figura 3 mostra com l'estratègia de les empreses és sempre posar un preu lleugerament inferior al preu de l'altre bé. En el funcionament normal d'aquest model, les empreses posen un preu inicial i llavors van fent les correccions de preu per maximitzar el seu benefici. Com ja hem dit, l'incentiu és

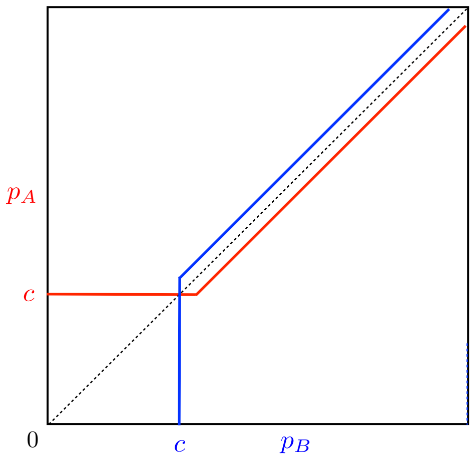

Figura 3: Millor resposta de cada empresa per a un preu de l'altra en el model de Bertrand.

sempre baixar el preu per obtenir un domini complet de mercat, i això porta a l'equilibri de Nash amb preus iguals al cost de producció. El punt on es creuen les dos línies que representen els preus de millor resposta es correspon amb l'equilibri en qüestió $p_A = p_B = c$.

3 El model de Hotelling

Harold Hotelling va publicar el 1929 [2] un model de mercat consistent en la competició de dues empreses en un espai d'una dimensió, que podria representar una via de comunicació que conecta els actors del model. Avançant-nos una mica als esdeveniments ja diem que la principal conclusió de Hotelling va ser, de fet, errònia. En efecte, aquest matemàtic va conclore que hi ha una tendència per part de les empreses a apropar-se tant com fos possible, el que va anomenar «Principi de Mínima Diferenciació». C. d'Aspremont, J. J. Gabszewicz i J.-F. Thisse van revisar el model original i van publicar el 1979 un article [1] que troba uns errors en l'anàlisi de Hotelling i corregeix aquest principi.

Tot i la invalidesa del principi de mínima diferenciació, el model de Hotelling va inspirar molts de posteriors per la seva senzillesa i la seva flexibilitat. Un factor que va contribuir a l'interès del seu model va ser la interpretació de la distància entre el comprador i l'empresa com un cost afegit per al comprador. Així doncs apareix una forma per diferenciar els béns apart del preu determinat per l'empresa; això obre les portes a noves interpretacions. Per exemple, en lloc de tractar la distància literalment, es pot entendre que el bé té una certa característica que afecta en la decisió del comprador. Llavors les posicions de les empreses poden representar el color del cotxe i un consumidor tindrà preferències sobre el color depenent de la seva posició.

A mitjan segle XX la formalització de la teoria de jocs per John F. Nash va proporcionar les eines necessàries per revisar i ampliar treballs clàssics d'economia, com ara el model de Hotelling.

En aquesta secció es farà un anàlisi detallat del model original, de les conclusions que en va treure i de les posteriors revisions que se n'han fet. Es trobaran doncs, les condicions necessàries per tal que existeixi un equilibri de Nash i també es determinarà quin és l'equilibri quan existeix.

També es mostrarà una modificació del model original on, enlloc de suposar un cost lineal, es suposarà quadràtic. Es realitzaran els càlculs per trobar l'equilibri seguint un raonament semblant al del model lineal i es veuran les aventatges que comporta aquest cost.

3.1 Model lineal

El model que Hotelling va publicar en el seu article de 1929 «Stability in competition» [2] presenta una línia oberta amb consumidors distribuïts uniformement i dues empreses, A i B, que es situen cadascuna en un punt qualsevol d'aquesta línia. Els béns de les dues empreses en aquest model són idèntics («homogenis») i sense cost de producció. El benefici de l'empresa serà doncs els diners obtinguts pels béns venuts. Per tant, hi ha una gran llibertat a l'hora d'escollir els preus de venta. Cada cosumidor compra un únic producte per unitat de temps i, degut a que els productes de les dues empreses són homogenis, comprarà el que el suposi una despesa inferior. Aquesta ve donada per la

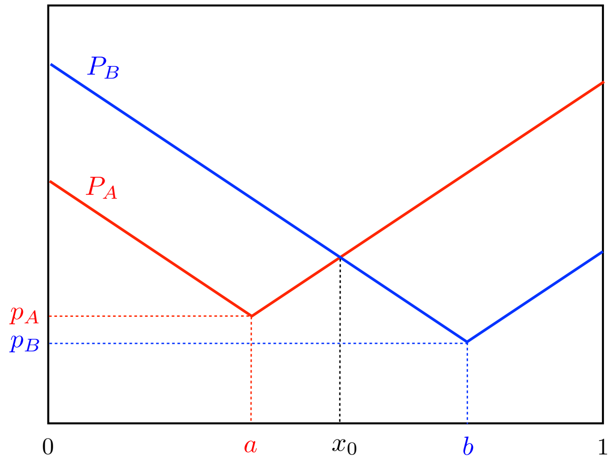

Figura 4: Despesa dels consumidors en el model lineal de Hotelling quan el mercat està dividit en dues parts.

suma del preu dictat per l'empresa més un cost de transport que depèn linealment de la distància entre el consumidor i el venedor.

És molt important parar atenció en el funcionament de la competició de les empreses, ja que es tracta d'un joc de dues etapes. La primera consisteix en la tria de posició: les empreses trien amb total llibertat i al mateix temps en quina posició del segment es situaran. Com que la tria es fa simultàniament, una empresa no sap on estarà l'altra fins després d'haver triat la pròpia posició. La segona etapa és la tria de preus: les empreses trien el preu al que vendran el seu producte tenint en compte les seves posicions. De nou es fa una tria simultània. L'equilibri de Nash es buscarà pel procediment d'inducció cap a enrere, buscant primer l'equilibri del subjoc de competició de preus i després trobant l'equilibri en la localització.

En aquest model es poden definir exactament les funcions de benefici π_A, π_B dels dos venedors A i B, que donen el benefici de cada empresa en funció de la col·locació d'ambdues empreses (els punts a i b de la línia), els preus dels béns (p_A i p_B) i el cost de transport. Aquest cost es considera una funció lineal de la distància entre el venedor i el consumidor: $C(x,a) = c\,|x-a|$ on x és la posició del consumidor i c és una constant positiva que representa el cost de transport per unitat de longitud. La despesa del consumidor serà la suma del preu del bé i el cost de transport (veure figura 4):

$$P_A(x,a) = p_A + c\,|x-a|$$
$$P_B(x,b) = p_B + c\,|x-b|$$

Un valor més gran de c suposarà haver de pagar més per comprar el bé que es troba a una certa distància.

Exemple 3.1. Sigui un model amb dues empreses situades en un segment de longitud 1 en les posicions $a = 0,25$ $b = 0,75$ amb compradors distribuits uniformement sobre

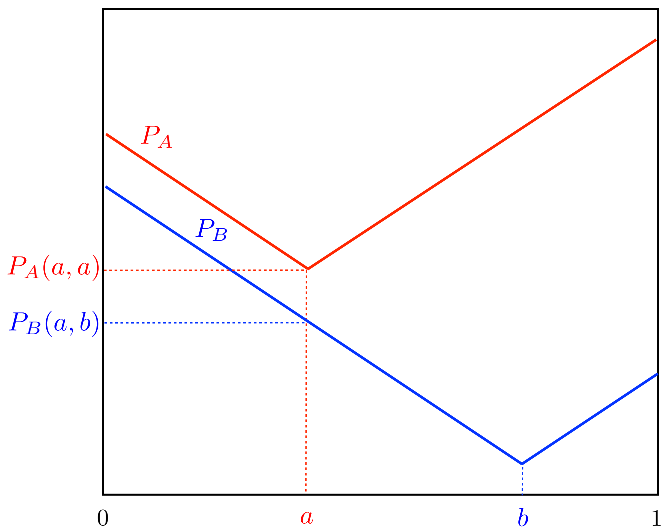

Figura 5: Despesa dels consumidors en el model lineal de Hotelling quan B domina el mercat.

el segment. Ambdues produeixen el mateix bé però el vènen a preus diferents $p_A = 1$ $p_B = 1,3$. Si $x = 0,6$ el consumidor que es troba en aquesta posició haurà de pagar pel bé A: $P_A(x,a) = 1,35$ i pel bé B: $P_B(x,b) = 1,45$; per tant, com els béns són els mateixos, el consumidor en x comprarà el bé de A.

Aquest model presenta tres situacions ben diferenciades: dos extremals on un dels venedors té un domini complet de mercat, i una tercera on el mercat està dividit en dos trossos. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que la longitud de la línia és 1 ($a, b \in [0,1] \subset \mathbb{R}$) i que $a \leq b$. S'assoleix una situació de domini complet de mercat quan tots els consumidors prefereixen comprar a la mateixa empresa; és a dir, a tots els consumidors els resulta més barat comprar a la mateixa empresa (veieu figura 5). Expressant-ho amb les funcions que hem fet servir abans tenim que si $P_A(x,a) > P_B(x,b)\ \forall x \in [0,1]$, tots els consumidors compren a B. La inequació es pot expressar d'una manera més convenient advertint que

$$P_A(a,a) > P_B(a,b) \implies P_A(x,a) > P_B(x,b)\ \forall x \in [0,1]$$

Els tres casos que es donen són els següents:

1. En el primer cas B domina el mercat, el benefici de A és 0 i el de B és el preu del seu producte per l'interval corresponent als compradors que consumeixen el seu

producte, que en aquest cas és 1:

$$\begin{aligned} p_A &> p_B + c\,(b-a) \\ \pi_A\,(p_A, p_B) &= 0 \\ \pi_B\,(p_A, p_B) &= p_B \end{aligned} \tag{3.1}$$

2. En el segon cas A domina el mercat i es produeix la situació contrària al cas anterior:

$$\begin{aligned} p_B &> p_A + c\,(b-a) \\ \pi_A\,(p_A, p_B) &= p_A \\ \pi_B\,(p_A, p_B) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3. En el tercer cas el mercat queda dividit en dos parts tals que els consumidors situats a la primera $[0, x_0]$ compren a A i els de la segona $[x_0, 1]$ compren a B, amb $x_0 \in [0,1]\,, a \leq x_0 \leq b$. Aquest punt x_0 representa la posició d'un comprador que li és indiferent comprar a un venedor o a l'altre, és a dir:

$$p_A + c\,(x_0 - a) = p_B + c\,(b - x_0)$$

Aïllant x_0 s'obté

$$x_0 = \frac{(p_B - p_A)}{2c} + \frac{a+b}{2}$$

com que no estem en el cas 1 ni el 2 tenim que $p_A < p_B + c\,(b-a)$ i $p_B < p + c\,(b-a)$ i es poden combinar les dues expressions en una utilitzant el valor absolut de la diferència dels preus

$$|p_A - p_B| < c\,(b-a)$$

$$\pi_A\,(p_A, p_B) = p_A x_0 = \frac{p_A}{2}\,(a+b) + \frac{p_B p_A}{2c} - \frac{p_A^2}{2c} \tag{3.3}$$

$$\pi_B\,(p_A, p_B) = p_B\,(1 - x_0) = p_B\left(1 - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{p_B p_A}{2c} - \frac{p_B^2}{2c} \tag{3.4}$$

Si unim els tres casos podem expressar la funció de benefici de l'empresa A com la funció definida a trossos:

$$\pi_A\,(p_A, p_B) = \begin{cases} p_A & p_B > p_A + c\,(b-a) \\ \frac{p_A}{2}\,(a+b) + \frac{p_B p_A}{2c} - \frac{p_A^2}{2c} & |p_A - p_B| < c\,(b-a) \\ 0 & p_A > p_B + c\,(b-a) \end{cases}$$

Fem el mateix amb la funció de benefici de B:

$$\pi_B\,(p_A, p_B) = \begin{cases} 0 & p_B > p_A + c\,(b-a) \\ p_B\left(1 - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{p_B p_A}{2c} - \frac{p_B^2}{2c} & |p_A - p_B| < c\,(b-a) \\ p_B & p_A > p_B + c\,(b-a) \end{cases}$$

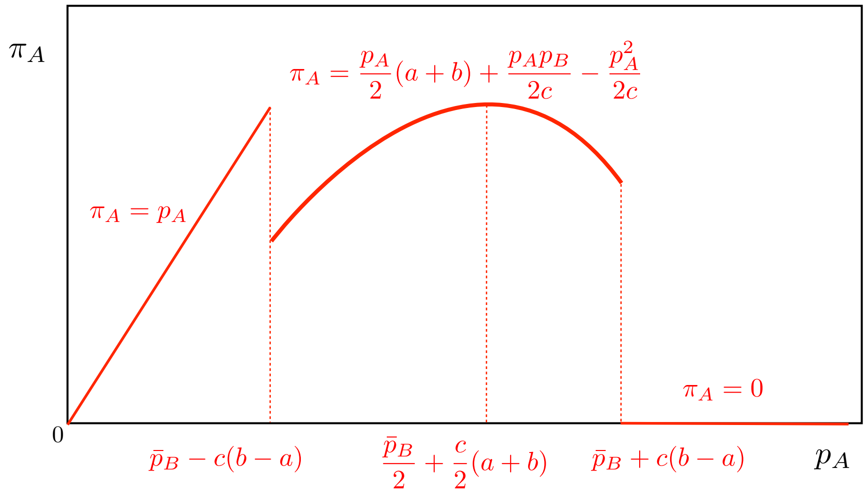

Figura 6: Benefici de l'empresa A en funció de p_A per un valor fixat de p_B en el model lineal de Hotelling.

Les funcions es poden representar gràficament, per representar π_A suposem un valor fixat de p_B que denotem $\bar{p}_B$ i tractem la resta de variables com a paràmetres (veieu la figura 6).

S'observa com la funció de benefici no és contínua i que, tot i assolir un màxim local en el segon tros, depenent dels paràmetres resultarà ser un màxim local o es veurà sobrepassat per un punt del primer tros.

Amb aquests resultats es pot seguir treballant amb el model per tal de trobar un equilibri de Nash per situacions que corresponen al tercer cas (eq. 3.3):

Proposició 3.2. *Tot equilibri* (p_A^*, p_B^*) *ha de satisfer* $|p_A^* - p_B^*| < c\,(b-a)$

Demostració: Si $|p_A^* - p_B^*| > c\,(b-a)$ el venedor amb preu més alt té benefici nul, (veure casos 1 i 2) per tant, mitjançant una reducció de preu acabaria obtenint un benefici positiu, cosa que es contradiu amb que (p_A^*, p_B^*) és un equilibri. □

Proposició 3.3. *Existeix un equilibri de Nash si, i només si es compleixen les següents condicions:*

$$(2+a+b)^2 \geq 12\,(2+a-2b) \tag{3.5}$$

$$(4-a-b)^2 \geq 12\,(1+2a-b) \tag{3.6}$$

En tal cas l'equilibri està únicament determinat per

$$p_A^* = \frac{c}{3}\left(2 + a + b\right) \tag{3.7}$$

$$p_B^* = \frac{c}{3}\left(4 - a - b\right) \tag{3.8}$$

Demostració: Sigui (p_A^*, p_B^*) una parella de preus que són un equilibri de Nash, p_A^* ha de maximitzar $\pi_A\left(p_A, p_B^*\right)$, ja que el equilibri de Nash es dóna per a un màxim de les funcions de benefici. S'ha de recordar que l'equilibri no s'assolirà per a uns valors qualssevol perquè acabem de demostrar que $|p_A - p_B| < c\,(b-a)$ és necessari per a l'existència d'equilibri de Nash. Fixant p_B^* i derivant parcialment la funció de benefici (eq. 3.3) respecte de p_A obtenim

$$\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A, p_B^*\right)\right)}{\partial p_A} = \frac{(a+b)}{2} + \frac{p_B^*}{2c} - \frac{p_A}{c}$$

igualant a zero la expressió i substituint p_A per p_A^* s'arriba a

$$\frac{(a+b)}{2} + \frac{p_B^*}{2c} - \frac{p_A^*}{c} = 0$$

per últim aïllem

$$p_A^* = \frac{c\,(a+b)}{2} + \frac{p_B^*}{2} \tag{3.9}$$

A continuació fem el mateix procediment amb $\pi_B\left(p_A^*, p_B\right)$ (eq. 3.4), fent la derivada parcial per p_B, substituïnt per p_B^* però aïllant p_A^*

$$\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*, p_B\right)\right)}{\partial p_B} = \left(1 - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{p_A^*}{2c} - \frac{p_B}{c}$$

$$\left(1 - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{p_A^*}{2c} - \frac{p_B^*}{c} = 0$$

$$p_A^* = 2p_B^* + c\,(a+b) - 2c \tag{3.10}$$

Ara ja podem igualar les dues expressions (3.9) i (3.10) per trobar p_B^* en funció de a i b

$$\frac{c\,(a+b)}{2} + \frac{p_B^*}{2} = 2p_B^* + c\,(a+b) - 2c$$

$$p_B^* = \frac{c}{3}\left(4 - a - b\right)$$

i només queda fer una substitució en una de les expressions de p_A^* per arribar a

$$p_A^* = \frac{c}{3}\left(2 + a + b\right)$$

Com ja s'havia indicat al principi, la demostració dóna primer l'equilibri i a continuació s'han de trobar les posicions de les empreses on es pot assollir aquest equilibri. Com que (p_A^*, p_B^*) és un equilibri llavors $\pi_A(p_A^*, p_B^*)$ és un màxim de la funció de benefici de l'empresa, però sabem que hi ha un punt on es trenca la continuitat de la funció de benefici i, per tant, hem de veure que aquest màxim local és el màxim absolut de la funció. La funció de benefici presenta una discontinuitat quan $|p_A - p_B| = c(b-a)$, que pot semblar que quedi fora de les condicions en les que hem treballat fins ara, ja que havíem vist que $|p_A - p_B| < c(b-a)$ és necessari per a l'existència d'equilibri. Hem de recordar doncs que la demostració no segueix el mateix ordre que les etapes del model i que pot ser que, donades unes posicions de les empreses, es calculi un equilibri fals, ja que una empresa podria obtenir un benefici major posant un preu fora del cas 3; o sigui, un preu amb el que obtindria un domini de mercat.

Per evitar aquests casos s'han de plantejar dues condicions més d'existència d'equilibri que garanteixin que el benefici en l'equilibri sigui major al benefici en el cas de domini complet de mercat. Llavors l'equació que hem de plantejar és la següent:

$$\pi_A(p_A^*, p_B^*) > \pi_A(p_B^* - c(b-a) - \varepsilon, p_B^*) \tag{3.11}$$

on la branca esquerra és la funció de benefici dels preus que formen un equilibri de Nash i la branca dreta és la funció de benefici amb un preu p_A una mica més petit que $p_B^* - c(b-a)$, de manera que ens trobem en una situació on A domina el mercat. Substituint (3.7) i (3.8) en (3.3):

$$\begin{aligned}\pi_A(p_A^*, p_B^*) &= \frac{\frac{c}{3}(2+a+b)}{2}(a+b) + \frac{\frac{c}{3}(4-a-b)\frac{c}{3}(2+a+b)}{2c} - \frac{\left(\frac{c}{3}(2+a+b)\right)^2}{2c} = \\ &= \frac{c}{18}\left(a^2+b^2+2ab+4a+4b+4\right) = \frac{c}{18}(2+a+b)^2\end{aligned}$$

i en (3.4):

$$\pi_A(p_B^* - c(b-a) - \varepsilon, p_B^*) = \frac{c}{3}(4-a-b) - c(b-a) - \varepsilon = \frac{c}{3}(4+2a-4b) - \varepsilon$$

llavors tornem a l'equació (3.11) de manera que

$$\frac{c}{18}(2+a+b)^2 > \frac{c}{3}(4+2a-4b) - \varepsilon$$

Aquesta inequalitat es compleix $\forall\varepsilon > 0$, agafant el límit quan ε tendeix cap a zero

$$(2+a+b)^2 > 12(2+a-2b)$$

Finalment, hem de repetir el procediment per π_B:

$$\begin{aligned}\pi_B(p_A^*, p_B^*) &= \frac{c}{3}(4-a-b)\left(1-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\frac{c}{3}(4-a-b)\frac{c}{3}(2+a+b)}{2c} - \frac{\left(\frac{c}{3}(4-a-b)\right)^2}{2c} = \\ &= \frac{c}{18}\left(a^2+b^2+2ab-8a-8b+16\right) = \frac{c}{18}(4-a-b)^2\end{aligned}$$

$$\pi_B(p_A^*, p_A^* - c(b-a) - \varepsilon) = \frac{c}{3}(2+a+b) - c(b-a) - \varepsilon = \frac{c}{3}(2+4a-2b) - \varepsilon$$

$$\frac{c}{18}(4-a-b)^2 > \frac{c}{3}(2+4a-2b) - \varepsilon$$

$$(4-a-b) > 12(1+2a-b)$$

Amb això queda demostrada la proposició. $\square$

Amb els càlculs fets fins ara, ja es pot contrastar el principi de mínima diferenciació que Hotelling va concloure. Derivant les funcions de benefici en l'equilibri respecte de la posició de cada empresa obtenim el següent:

$$\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial a} = \frac{c}{9}\left(2+a+b\right) > 0$$
$$\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial b} = -\frac{c}{9}\left(4-a-b\right) < 0$$

S'observa que l'empresa A té una tendència a moure's cap a la dreta i l'empresa B tendeix a anar cap a l'esquerra. Efectivament, ambdues empreses tendeixen a anar cap el centre, però això només és cert quan es donen les condicions de la proposició 3.3. En el cas que les empreses estiguessin en posicions molt properes al centre s'estarien violant les condicions (3.5) i (3.6), no existiria l'equilibri de Nash i càlculs com l'anterior no serien vàlids.

3.2 Model quadràtic

Aspremont, Gabszewicz i Thisse van proposar una modificació del model de Hotelling original per tal d'evitar problemes en quant a l'existència d'equilibri [1]. Aquesta proposta consisteix en modificar la funció del cost de transport, anteriorment definida com $C\left(x,a\right) = c\left|x-a\right|$ per la nova funció de cost $C\left(x,a\right) = c\left(x-a\right)^2$. La dependència amb la distància passa a ser quadràtica.

Seguint els procediments utilitzats en el cas anterior observem que hi ha els mateixos tres casos, dos on una empresa domina el mercat i un on el mercat està dividit en dos parts. La manera de trobar les funcions de benefici és diferent i, de fet, més ràpida que en el cas lineal. Plantegem l'equació de la despesa del consumidor indiferent per A i B i aïllem per trobar la posició d'aquest:

$$\begin{aligned} P_A\left(x_0, a\right) &= P_B\left(x_0, b\right) \\ p_A + c\left(x_0 - a\right)^2 &= p_B + c\left(x_0 - b\right)^2 \\ p_A + cx_0^2 + ca^2 - 2cx_0a &= p_B + cx_0^2 + cb^2 - 2cx_0b \\ 2cx_0\left(b-a\right) &= p_B - p_A + c\left(b^2 - a^2\right) \\ x_0 &= \frac{p_B - p_A}{2c\left(b-a\right)} + \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

La figura 7 mostra les funcions de despesa per als consumidors donades les posicions de les empreses i els preus dels seus béns. El cas mostrat denota una diferència important amb el model lineal: el punt on es creuen les dues funcions (x_0) es pot trobar fora de l'interval (a, b). Això indica que a una petita variació de preu o desplaçament d'una empresa no provoca un salt sobtat del benefici, cosa que suggereix que la funció de benefici serà contínua.

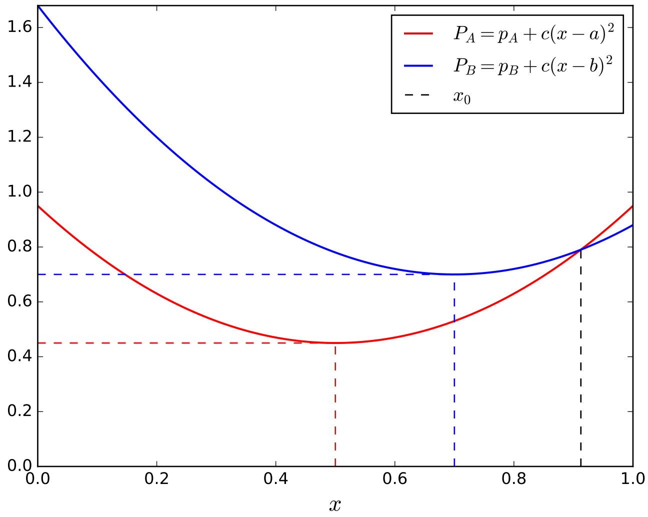

Figura 7: Despesa dels consumidors en el model de Hotelling amb cost quadràtic amb paràmetres $a = 0,5$, $b = 0,7$, $c = 2$, $p_A = 0,45$, $p_B = 0,7$

Aquesta x_0 serveix per determinar els tres trossos de la funció de benefici. Si $x_0 < 0$ llavors ens trobem en el cas que B domina el mercat ja que el consumidor indiferent no està sobre el segment $[0, 1]$. Podem comprovar que aquest resultat és mateix al que s'arriba imposant $P_A(x, a) > P_B(x, b)$ $\forall x \in [0, 1]$. Com que el cost és quadràtic sabem que el consumidor més allunyat per la banda esquerra és el que li suposarà una despesa major comprar a B que a A. Llavors la condició de domini de mercat per part de B s'escriu

$$\begin{gathered}
P_A(0, a) > P_B(0, b) \\
p_A + ca^2 > p_B + cb^2 \\
p_A > p_B + c\left(b^2 - a^2\right) \\
p_A > p_B + c(b-a)(b+a) \\
0 > p_B - p_A + c(b-a)(b+a) \\
0 > \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} = x_0
\end{gathered}$$

Així doncs, la funció de benefici de A serà, si ho escrivim amb les variables per tal que quedi de la manera més simplificada possible

$$\pi_A(p_A, p_B) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 < 0 \\ p_A x_0 & \text{si } 0 < x_0 < 1 \\ p_A & \text{si } x_0 > 1 \end{cases}$$

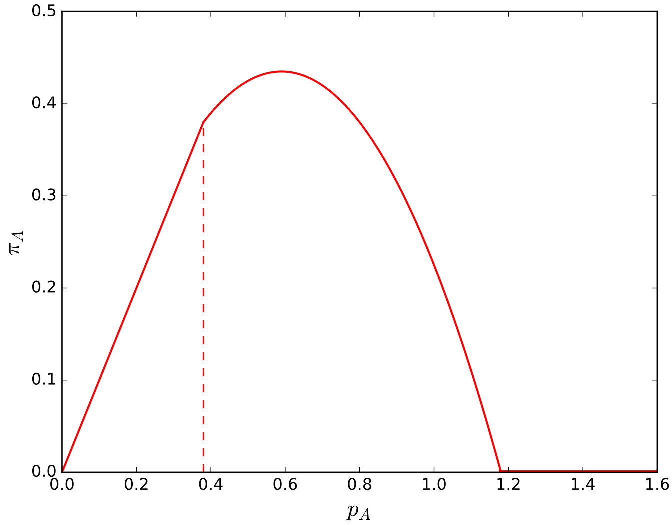

Figura 8: Funció de benefici de A en el model de Hotelling amb cost quadràtic amb paràmetres $a = 0,5$, $b = 0,7$, $c = 2$, $p_B = 0,7$

La funció de benefici d'A és clarament contínua ja que és una unió de tres funcions contínues que coincideixen en els punts d'unió. En general ho escriurem posant l'expressió d'x_0 en funció de les variables del model

$$\pi_A(p_A, p_B) = \begin{cases} p_A & \text{si } \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} > 1 \\ p_A\left(\frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2}\right) & \text{si } 0 < \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} < 1 \\ 0 & \text{si } \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} < 0 \end{cases}$$

El benefici de B és pràcticament igual però l'interval de mercat quan està dividit en dos trossos és $[x_0, 1]$ que és un interval de longitud $1 - x_0 = 1 - \left(\frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2}\right)$

$$\pi_B(p_A, p_B) = \begin{cases} p_B & \text{si } \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} < 0 \\ p_B\left(1 - \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} - \frac{b+a}{2}\right) & \text{si } 0 < \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} < 1 \\ 0 & \text{si } \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} > 1 \end{cases}$$

La figura 8 representa un exemple de funció de benefici π_A amb els mateixos paràmetres que la figura anterior però amb p_A com a variable.

Anem a veure doncs que existeix l'equilibri de Nash i el podem determinar unívocament. Suposem una parella de preus que formen un equilibri de Nash de la competició de preus (p_A^*, p_B^*) que maximitzen les funcions de benefici de A i B. Llavors $\pi_A(p_A, p_B^*)$ ha d'assolir un màxim per a $p_A = p_A^*$, i per tant la derivada evaluada en p_A^* serà igual a zero:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A, p_B^*\right)\right)}{\partial p_A} &= \frac{p_B^* - 2p_A}{2c\left(b-a\right)} + \frac{b+a}{2} \\
\frac{p_B^* - 2p_A^*}{2c\left(b-a\right)} + \frac{b+a}{2} &= 0 \\
p_B^* - 2p_A^* &= c\left(a^2 - b^2\right) \\
p_B^* &= 2p_A^* + c\left(a^2 - b^2\right) \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Per trobar l'expressió dels preus de l'equilibri en funció dels paràmetres repetim el procediment per $\pi_B\left(p_A^*, p_B\right)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*, p_B\right)\right)}{\partial p_B} &= \frac{p_A^* - 2p_B}{2c\left(b-a\right)} + 1 - \frac{b+a}{2} \\
\frac{p_A^* - 2p_B^*}{2c\left(b-a\right)} + 1 - \frac{b+a}{2} &= 0 \\
p_A^* - 2p_B^* &= 2c\left(a - b + \frac{b^2 - a^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

i substituïm l'expressió de p_B^* en l'última equació per aïllar p_A^*:

$$
\begin{aligned}
p_A^* - 2\left(2p_A^* + c\left(a^2 - b^2\right)\right) &= 2c\left(a - b + \frac{b^2 - a^2}{2}\right) \\
-3p_A^* &= c\left(2a - 2b - b^2 + a^2\right) \\
p_A^* &= \frac{c}{3}\left(b-a\right)\left(2+a+b\right) \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

p_B^* és llavors

$$
p_B^* = \frac{c}{3}\left(b-a\right)\left(4-a-b\right) \qquad (3.14)
$$

Aquesta parella de preus que conformen un equilibri existirà per a qualsevol parell a i b de posicions que hagin triat les empreses i, per tant, és l'equilibri de Nash del subjoc sense cap restricció.

Aparentment es podria donar el cas que el màxim de la funció de benefici no s'assolís en el segon tros de la funció si la funció fos decreixent sobre l'interval donat. En aquesta situació el màxim, enlloc de ser $p_A^* = \frac{p_B}{2} - \frac{c}{2}\left(a^2 - b^2\right)$ (eq 3.12), seria el punt $x_0 = 1$, que en termes dels paràmetres és

$$
p_A = p_B - c\left(b-a\right)\left(2-a-b\right)
$$

Llavors la derivada de la funció de benefici de A en aquest punt seria negativa. Anem a veure doncs que això no és possible per poder descartar aquest cas.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A, p_B\right)\right)}{\partial p_A} = \frac{\left(p_B - 2p_A\right)}{2c\left(b-a\right)} + \frac{b+a}{2} &< 0 \\
\frac{p_B - 2p_A + c\left(b-a\right)\left(b+a\right)}{2c\left(b-a\right)} &< 0 \\
\frac{-p_B + 2c\left(b-a\right)\left(2-a-b\right) + c\left(b-a\right)\left(b+a\right)}{2c\left(b-a\right)} &< 0 \\
-p_B + c\left(b-a\right)\left(4-a-b\right) &< 0 \\
p_B > c\left(b-a\right)\left(4-a-b\right)
\end{aligned}
$$

Per a uns valors de p_B que satisfan aquesta inequació no existiria l'equilibri, però això no és possible d'acord amb l'equació 3.14: un preu de B tal que la funció de profit d'A sigui decreixent en $x_0 = 1$ no seria un màxim de la seva pròpia funció de benefici. Per tant B mai escollirà un preu que provoqui que la funció no assoleixi el màxim en l'interval donat. El raonament per π_B és essencialment idèntic. Ens hem assegurat doncs, que la parella $\left(p_A^*, p_B^*\right)$ és un equilibri de Nash i que existirà per a qualsevol localització d'A i B.

L'últim pas es trobar l'equilibri en la tria de localitzacions. Com que hem trobat l'equilibri de preus sabem que les empreses triaran els preus $\left(p_A^*, p_B^*\right)$ perquè els maximitza el benefici:

$$
\begin{aligned}
\pi_A\left(p_A, p_B\right) = \pi_A\left(p_A^*, p_B^*\right) = \frac{c}{18}\left(b-a\right)\left(2+a+b\right)^2 \\
\pi_B\left(p_A, p_B\right) = \pi_B\left(p_A^*, p_B^*\right) = \frac{c}{18}\left(b-a\right)\left(4-a-b\right)^2
\end{aligned}
$$

Derivant el benefici de cada empresa respecte la seva posició podem veure quina es la tendència de la localització de les empreses:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial a} &= \frac{c}{18}\left(2+a+b\right)\left(-2+b-3a\right) < 0 \\
\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial b} &= \frac{c}{18}\left(4-a-b\right)\left(4+b-3a\right) > 0
\end{aligned}
$$

Comprovem doncs que l'empresa A tendeix a situar-se cap a l'esquerra mentre que B tendeix a situar-se cap a la dreta. L'equilibri de localitzacions és doncs el cas on les empreses es troben als dos extrems $a = 0$, $b = 1$. Finalment la solució del model és el perfil d'estratègies $\left[\left(0, p_A^*\right), \left(1, p_B^*\right)\right]$ que és un equilibri de Nash del joc de dues etapes.

4 Model de Caplin-Nalebuff

4.1 El model

En l'article de 1991 ≪Aggregation and Imperfect Competition On the Existence of Equilibrium≫ [10] Andrew Caplin i Barry Nalebuff elaboren un marc teòric per tal de demostrar l'existència d'equilibri en models que satisfan unes condicions. Es tracta d'un model molt general, ideat de forma que les condicions o suposicions que ha de complir són prou dèbils per englobar la majoria dels models actuals, en concret, els models de competició espacial de tipus Hotelling en una o més dimensions estan inclosos.

Hi ha m empreses i cada empresa i produeix un únic bé x_i amb cost unitari de producció c_i. Els béns $x_1, ..., x_n$ estan en un espai Euclidià $X \subset \mathbb{R}^n$ de dimensió n i s'utilitza un vector $\chi = (\chi_1, ..., \chi_k, ..., \chi_n)$ que representa un element general de X, on χ_k és la seva característica k-èssima. Aquest vector s'utilitzarà només en expressions que es refereixin a tots els béns, si s'ha de referir a un bé concret es podrà utilitzar la notació x_i. Els béns doncs, són magnituds vectorials on cada element del vector representa una característica. Comparant amb el model de Hotelling, el funcionament és el mateix: hi ha una primera etapa on les empreses trien les característiques del seu bé (a Hotelling es tria la posició) i una segona etapa on, donats tots els béns en el mercat $\bar{x} = [x_1, ..., x_m]$ les empreses trien els preus simultàniament.

Es considera un mercat on cada consumidor compra una únic bé triant el que li proporciona una major satisfacció. Les preferències del consumidor queden expressades a través de la funció d'utilitat. Les característiques del consumidor s'expressen mitjançant $\alpha \in \mathbb{R}^n$, vector que no faria falta que fos de la mateixa dimensió que les característiques dels béns però per als objectius d'aquest treball ja és adequat. En paraules del article, z es defineix com una ≪comoditat numeral≫, Tenint en compte l'ús que s'en fa posteriorment, una interpretació adequada és que z és una mesura dels diners restants del consumidor després d'haver comprat un bé. Per tant, z expressa un grau de satisfacció ≪econòmic≫ sobre el bé, i com més gran sigui, major serà la funció d'utilitat, que és de la forma $U = U(\alpha, \chi, z)$. Resultarà més pràctic al llarg del treball referir-se a cada bé per x_i i cada consumidor per α o de tipus α ja que les característiques determinen únicament cada un.

El model presenta dues suposicions $A1$, $A2$ que fan referència a dos aspectes diferents. La primera afecta a la funció d'utilitat i es caracteritza com una restricció sobre les preferències individuals, la segona és una restricció sobre la distribució de preferències en el conjunt de consumidors. Sota aquestes dues restriccions es presenta el teorema principal de l'article:

Teorema 4.1. *Sota les suposicions $A1$ i $A2$ per qualssevol nombre m d'empreses i els seus béns $\bar{x}$, existeix una estratègia pura d'equilibri de Nash.*

Veiem que una estratègia pura d'equilibri de Nash en aquest model és un perfil de preus que són la millor resposta entre ells i per tant constitueixen un equilibri.

Suposició $A1$**:**

La funció d'utilitat és de la forma següent:

$$U(\alpha, \chi, z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k(\chi) + g(z)\, t_{n+1}(\chi) + t_{n+2}(\chi)$$

on $U : \mathbb{R}^n \times X \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, $t : X \mapsto \mathbb{R}^{n+2}$. *A més la utilitat també ha de complir que* g *és una funció estrictament creixent i còncava i que* $t_{n+1}(\chi)$ *és estrictament positiva. Una de les propietats més importants d'aquesta suposició és la linealitat de la utilitat amb les característiques del consumidor.*

Definició 4.2. *Sigui* $\rho \in (-\infty, +\infty)$. *Si* $\rho > 0$ *direm que una funció no-negativa* f, *en el seu suport convex* $B \subset \mathbb{R}^n$ *es diu* ρ*-còncava si* $\forall \alpha_0, \alpha_1 \in B$,

$$f(\alpha_\lambda) \geq \left[(1-\lambda) f(\alpha_0)^\rho + \lambda f(\alpha_1)^\rho\right]^{1/\rho}, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

on $\alpha_\lambda = (1-\lambda)\alpha_0 + \lambda\alpha_1$ *representa un punt qualsevol de la recta que uneix* α_0 *i* α_1. *Més endavant tornarà a aparèixer aquest concepte no només com una recta que uneix dos punts sinò també com tots els punts* $z_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y \; \forall x \in X,\; y \in Y$ *on* X, Y *són dos conjunts qualssevol.*[2] *Es referencia a l'article com la mitja de Minkowski i val la pena observar que només té sentit parlar-ne en conjunts convexos, ja que la convexitat garanteix que la recta que uneix dos punts està continguda en el conjunt. En aquesta primera definició la* ρ*-cóncavitat és només per a* $\rho > 0$. *Si tenim* $\rho < 0$ *la definició és la mateixa amb una excepció: quan* $f(\alpha_0) f(\alpha_1) = 0$, *l'única restricció és que* $f(\alpha_\lambda) \geq 0$. *La definició es pot estendre més encara per incloure els casos* $\rho = -\infty, 0, \infty$. *La discussió en detall de la* ρ*-concavitat està en detall en l'article germà a aquest [14], serà útil però observar una sèrie de propietats: si una funció és* ρ*-còncava, llavors també serà* ρ'*-còncava* $\forall \rho' < \rho$. *El cas* $\rho = \infty$ *es dóna només si* f *és una distribució uniforme,* $\rho = 0$ *es correspon amb la log-concavitat,* $\rho = -\infty$ *es correspon amb la quasi-concavitat.*

Suposició $A2$**:**

La densitat de probabilitat dels consumidors satisfà: $f(\alpha)$ *és* ρ*-còncava, el seu suport és convex* $B \subset \mathbb{R}^n$ *amb volum positiu i* $\rho = -\frac{1}{n+1}$.

La concavitat que es demana en aquesta suposició és una forma de concavitat poc restrictiva que inclou tant la concavitat estàndard com la log-concavitat. Per tant defineix un marc general tal que moltes de les distribucions utilitzades en economia queden incloses en $A2$.

Recuperant el model de Hotelling amb costs de transport lineals podem veure que no compleix les suposicions que garanteixen l'existència d'un equilibri de Nash. Es pot

[2] Tot i que α és un vector el subíndex no representa el element k-èssim en aquest cas. Més endavant quan tornem a usar l'expressió, posarem la λ com a superíndex.

observar, en el model lineal, com la funció d'utilitat d'un consumidor no compleix $A1$ ja que

$$U(\alpha, \chi, z) = -\|\chi - \alpha\| + z$$

Usant la notació que hem fet servir per al model de Hotelling tenim que $\alpha = x$ —les preferències del consumidor són la seva posició—, $\chi = a$ —les característiques del bé són la posició de l'empresa— i $z = -p_A$ —la quantitat de diners perduts és el preu del producte. Llavors:

$$U(x, a, p_A) = -\|a - x\| - p_A$$

Es pot comprovar que no existeix cap transformació que permet representar la norma de $\chi - \alpha$ en termes del sumatori de $A1$. En canvi si es suposa un cost de transport quadràtic la funció d'utilitat passa a ser de la forma $U(\alpha, \chi, z) = -\|\chi - \alpha\|^2 + z$ que sí que entra dins la suposició $A1$ però s'ha de cuidar un detall. En el cas que les preferències i les característiques siguin d'una dimensió

$$U(\alpha, \chi, z) = -(\chi - \alpha)^2 + z = -\chi^2 - \alpha^2 + 2\chi\alpha + z$$

on $g(z) = z$, $t_{n+2}(\chi) = -\chi^2$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k(\chi) = 2\chi\alpha$ i queda un terme $-\alpha^2$ que aparentment no està recollit per $A1$. Cal veure que aquest terme és prescindible respecte la forma en que actua la funció d'utilitat. S'ha vist anteriorment com la funció d'utilitat dóna una relació d'ordre entre els diferents béns que pot comprar un consumidor. Un terme de la funció d'utilitat que no depèn de les característiques del bé esdevé irrellevant ja que serà el mateix en totes les funcions d'utilitat del consumidor. Per a dimensions superiors s'utilitza la norma i l'argument anterior es manté igual.

Abans de començar amb la demostració del teorema d'existència d'equilibri és necessari definir la funció del preu de reserva.

Definició 4.3. *El preu de reserva, des del punt de vista d'un comprador, és el màxim preu que està disposat a pagar per un bé concret. Cada consumidor té un preu de reserva R_i per a cada bé x_i i maximitzarà la seva utilitat si i només si $p_i \leq R_i(\alpha, \bar{x}, p_{-i})$. En un sistema d'aquesta complexitat s'ha de considerar la funció d'utilitat de la millor de les alternatives al producte en qüestió*

$$A_i(\alpha, \bar{x}, p_{-i}) \equiv \max_{j \neq i} U(\alpha, x_j, Y - p_j)$$

finalment la funció del preu de reserva és

$$R_i(\alpha, \bar{x}, p_{-i}) = \begin{cases} Y, & \textit{si } U(\alpha, x_i, 0) \geq A_i \\ Y - z_i & \textit{quan existeix una solució } U(\alpha, x_i, z_i) = A_i \\ -\infty & \textit{si } U(\alpha, x_i, z) < A_i \; \forall\, z \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

Aquesta definició necessita una mica de d'explicació. Observem la diferent notació en quant a les característiques del bé $\chi \to x_i$. Quan es tracta la funció d'utilitat en general χ fa referència a un bé qualsevol, en canvi, si es tracta un bé específic, x_i és més convenient que posar, per exemple, χ^i. Per tant en la funció del preu de reserva, que és d'un bé específic ja no utilitzarem χ i de fet ja no l'utilitzarem més en el que resta de treball.

Apart d'aquest canvi, s'ha introduït unes variables. $p_{-i} = (p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_m)$ és notació habitual en economia i teoria de jocs i significa els preus de tots els productes que no són x_i. El valor Y, que tornarà a aparèixer més endavant, representa una quantitat de diners que el consumidor està disposat a gastar, per trobar l'equilibri de Nash es posen algunes restriccions sobre els possibles valors de Y però en general almenys suposarem que $Y > 0$. Amb aquesta interpretació z passa a ser una mesura dels diners restants en cas de realitzar-se la compra del producte. Això queda prou clar quan $z = Y - p_i$, però també apareixen altres casos.

Considerem el primer terme de la funció del preu de reserva: $R_i(\alpha, \bar{x}, p_{-i}) = Y$ si $U(\alpha, x_i, 0) \geq A_i$. Com que la funció R_i depèn de p_{-i}, tots els preus p_j amb $j \neq i$ han d'estar ben definits. La fórmula planteja que quan la funció d'utilitat d'un consumidor tipus α per a un producte x_i (el preu del qual no sabem però suposem $\hat{p}_i = Y$) és més gran que la utilitat de comprar qualsevol altre producte llavors serà rentable dedicar aquesta quantitat de diners Y a comprar o reservar el producte x_i.

Si ens trobem en el segon cas significa que hi ha un cert preu $\hat{p}_i = Y - z_i$ per al que la utilitat del producte x_i és igual a la millor de les alternatives. Llavors aquest preu serà la funció del preu de reserva per el producte x_i. Plantejant variacions de z_i veiem que si agafem $z_i' > z_i$, com que la utilitat és creixent en z, $U(\alpha, x_i, z_i') > U(\alpha, x_i, z_i)$, la qual cosa té sentit perquè z_i' representa un preu inferior pel producte x_i. Però això no canvia el que el consumidor estaria disposat a comprar el producte a un preu superior ja que no hi ha alternatives millors. En canvi si agafem $z_i' < z_i$ clarament la nova funció d'utilitat és inferior a la anterior, però això no suposa un canvi en el preu de reserva que es mantindria igual per l'existència d'una alternativa millor.

L'últim cas planteja la situació en que l'alternativa al producte x_i sempre és preferible. Estudiant una mica l'expressió podem veure que depenent de quina funció sigui $g(z)$, pot ser que en el model no es dóni aquest tercer cas, per exemple en el cas típic $g(z) = z$ sempre podrem triar un z prou gran com perquè $U(\alpha, x_i, z) > A_i$. Aquest cas doncs cobrarà rellevància quan $g(z)$ sigui una funció tal que $\lim_{z\to\infty} g(z) < \infty$ perquè podran existir casos on $\forall\, z \in \mathbb{R}$, $U(\alpha, x_i, z) < A_i$.

Exemple 4.4. Mirem com actua la funció del preu de reserva en un model senzill: Sigui $f(\alpha)$ una distribució de consumidors uniforme sobre un espai de dues dimensions en forma de quadrat, $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Tenim que hi ha dues empreses situades en punts diferents d'aquest espai tals que la seva posició determina les característiques del seu bé, $x_1 = (1/3, 1/3)$, $x_2 = (2/3, 2/3)$, observem que es dóna el cas que el nombre d'empreses m és igual a la dimensió de l'espai de característiques dels béns n, cosa que no té perquè ser en altres models. Considerem que la funció d'utilitat és la del cost de transport quadràtic $U(\alpha, \chi, z) = -\|\chi - \alpha\|^2 + z$. Llavors un consumidor amb preferències $\alpha = (1/4, 2/3)$ tindrà una utilitat

$$U(\alpha, x_1, z) = -(1/3 - 1/4)^2 - (1/3 - 2/3)^2 + z = -7/36 + z$$

pel primer bé i una utilitat

$$U(\alpha, x_1, z) = -(2/3 - 1/4)^2 - (2/3 - 2/3)^2 + z = -5/12 + z$$

pel segon bé a falta que les empreses triïn els preus dels seus béns. Plantejem la funció del preu de reserva pel primer bé d'un consumidor tipus α:

$$R_1(\alpha, \bar{x}, p_2) = \begin{cases} Y, & \text{si } U(\alpha, x_1, 0) \geq A_1 \\ Y - z_1 & \text{quan existeix una solució } U(\alpha, x_1, z_1) = A_1 \\ -\infty & \text{si } U(\alpha, x_1, z) < A_1 \; \forall\, z \in R \end{cases}$$

Al estar en un model amb només dues empreses la funció de la millor alternativa passa a ser la utilitat d'un consumidor tipus α pel segon bé i amb $z = Y - p_2$,

$$A_1(\alpha, \bar{x}, p_2) = U(\alpha, x_2, Y - p_2) = -5/12 + Y - p_2$$

Per continuar hem de suposar que les empreses determinen uns preus $p_1 = 1$ i $p_2 = 2$ i que aquests preus són menors que Y, la quantitat de diners que α està disposat a gastar. Amb tot això estudiem la funció de preu de reserva cas per cas.

$U(\alpha, x_1, 0) = -7/36$, $A_1(\alpha, \bar{x}, p_2) = -5/12 + Y - 2 = Y - 29/12$, llavors $U(\alpha, x_1, 0) \geq A_1 \iff -7/36 + 29/12 \geq Y$. Veiem que en funció de Y estarem en el primer o el segon cas. Si $Y = 2$, que és la cota inferior que hem suposat, $-7/36 + 29/12 = 20/9 > 2$ estem en el primer cas i el preu de reserva pel primer bé és $R_1 = Y = 2$.

Si $Y > 20/9$, posem $Y = 3$ llavors $U(\alpha, x_1, 0) < A_1$ i estem en el segon cas.

$$U(\alpha, x_1, z_1) = -7/36 + z_1 = -5/12 + 3 - 2 = A_1$$

que és cert quan $z_1 = 7/12 + 7/36 = 28/36 = 7/9$ i per tant el preu de reserva és $R_1 = 3 - 7/9 = 20/9$.

L'últim cas no succeïrà en un model senzill com aquest.

Podem observar que el consumidor tipus α preferirà comprar x_1 sempre que p_1 no sigui superior 20/9, és a dir $p_1 \leq R_1(\alpha, \bar{x}, p_2)$. Òbviament amb $p_1 = 1$ el consumidor comprarà x_1.

4.2 Demostració de l'existència d'un equilibri de Nash

Tornem al Teorema 4.1, les condicions que es proposen són suficients per a l'existència de l'equilibri però no necessàries, com fa evident l'existència de models que no compleixen les suposicions però igualment arriben a un equilibri. Veiem un exemple en l'article de de

Frutos, Hamoudi i Jarque [13] en el que es prova l'existència d'un equilibri localització-preu en un model circular amb un cost de transport donat per $C(z) = bz - bz^2$, que expressat en forma de funció d'utilitat no compleix la suposició $A1$.

Tanmateix pot ser difícil veure la relació entre les hipòtesis del teorema i la conclusió a la que s'arriba. L'objectiu final és obviament la prova de l'existència del equilibri i això es fa mitjançant l'aplicació del Teorema del punt fix de Kakutani sobre una correspondència. És la correspondència de la millor resposta i es defineix assignant, a cada empresa el conjunt de preus que maximitzen el seu benefici. És necessari l'ús de correspondències i no funcions perquè s'han d'incloure els casos on la millor resposta d'una empresa pot ser més d'una estratègia de manera que una funció que només pot tenir una imatge per cada valor no és suficient.

Per demostrar que la correspondència està ben definida i compleix les condicions necessàries per poder aplicar el teorema del punt fix de Kakutani haurem de veure que les funcions de benefici, que són les que determinen els preus de millor resposta, són contínues i quasi-còncaves. Per veure això haurem de trobar primer com són les funcions de demanda, de manera que la demostració de l'existència d'un equilibri de Nash començarà determinant les propietats de la funció de demanda a partir de les dues suposicions $A1$ i $A2$. Comencem provant la proposició següent:

Proposició 4.5. *Sota $A1$ i $A2$ la demanda és una funció contínua del vector de preus p sempre que no hi hagi béns equivalents; és a dir $t(x_i) \neq t(x_j)$ $\forall i \neq j$.*

Demostració: La continuitat es demostra descartant l'existència de discontinuitats que podrien aparèixer si hi hagués un conjunt de mesura positiva de consumidors que tinguessin la mateixa utilitat per a dos béns diferents. Plantegem doncs els consumidors que els hi és indiferent comprar i o j. Les funcions d'utilitat d'aquests consumidors són, respectivament

$$U(\alpha, x_i, z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k(x_i) + g(z)\, t_{n+1}(x_i) + t_{n+2}(x_i)$$
$$U(\alpha, x_j, z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k(x_j) + g(z)\, t_{n+1}(x_j) + t_{n+2}(x_j)$$

Les funcions d'utilitat tenen el mateix valor i igualant-les queda la següent expressió

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(t_k(x_j) - t_k(x_i)\right) = g(z)\, t_{n+1}(x_i) + t_{n+2}(x_i) - g(z)\, t_{n+1}(x_j) - t_{n+2}(x_j)$$

Definint el vector η_{ij} tal que la coordenada k-èssima és igual a $t_k(x_j) - t_k(x_i)$ i el valor escalar $b_{ij} = g(z)\, t_{n+1}(x_i) + t_{n+2}(x_i) - g(z)\, t_{n+1}(x_j) - t_{n+2}(x_j)$, la igualtat es redueix a

$$\alpha \cdot \eta_{ij} = b_{ij} \tag{4.2}$$

on $\alpha \cdot \eta_{ij}$ és un producte escalar de dos vectors de dimensió n. Com que hem suposat que els béns no són equivalents tenim que $\eta_{ij} \neq 0$ i per tant l'equació (4.2) defineix un hiperplà de $\mathbb{R}^n$; és a dir, el conjunt de consumidors indiferents per a dos productes forma un hiperplà de $\mathbb{R}^n$. Com que la funció de distribució $f(\alpha)$ és ρ-còncava, la funció és també contínua i assolirà valors finits en el conjunt de consumidors indiferents. La mesura d'aquest conjunt amb la distribució donada estarà acotada pel màxim de la funció de distribució multiplicat per la mesura del hiperplà, que és zero. Per tant, el conjunt de consumidors indiferents té mesura zero. Finalment com que $g(z)$ és una funció contínua la demanda és també una funció contínua. $\square$

La continuitat de la funció de demanda és un requeriment important ja que el benefici s'obté directament de la demanda i del cost. Una discontinuitat de la demanda representa una discontinuitat del benefici i això és precisament el cas del model lineal de Hotelling que ja hem vist. La proposició 4.5 suposa $t(x_i) \neq t(x_j)$, la qual cosa assegura que dos béns diferents es veuran representats de diferent manera en la funció d'utilitat. Si considerem l'existència de béns equivalents tal que $t(x_i) = t(x_j)$ llavors els consumidors triarien el bé que es vengués a un preu inferior. Tot i així l'existència de béns equivalents no és preocupant perquè en models espacials com el de Hotelling no es tracten aquests casos.

Amb la demanda contínua i la funció del preu de reserva, es pot definir la funció de demanda utilitzant el preu de reserva per determinar el conjunt de consumidors que constituiran la demanda d'una empresa.

Definició 4.6. *La funció de demanda $D_i(p_i)$ d'un bé concret x_i dóna la quantitat de consumidors que compraran aquell bé.*

Amb les suposicions fetes, cada consumidor comprarà un únic bé, podem utilitzar la funció del preu de reserva per determinar quin bé comprarà. De fet tenim que si $R_i(\alpha, \bar{x}, p_{-i}) \geq p_i$ llavors un consumidor tipus α comprarà el bé x_i. Com que els consumidors estan distribuits d'acord amb $f(\alpha)$ en un continu, la demanda d'un bé x_i venut a un preu p_i serà

$$D_i(p_i) = \int_{\{\alpha : R_i(\alpha, \bar{x}, p_{-i}) \geq p_i\}} f(\alpha)\, d\alpha \tag{4.3}$$

L'expressió final es una integral que es pot considerar prou senzilla. Per veure com afecten les assumpcions al comportament de la integral hem d'introduir el teorema de Prékopa-Borell. El resultat del teorema mostra com es transformen les propietats de concavitat d'una funció al fer-ne la seva integral sobre un tipus concret de conjunts.[6, 11]

Teorema 4.7 (Prékopa-Borell). *Sigui f una funció de densitat en $\mathbb{R}^n$ amb un suport convex B. Agafem dos conjunts mesurables A_0 i A_1 en $\mathbb{R}^n$ tals que la seva intersecció amb B sigui no nula, $A_0 \cap B \neq \emptyset$ i $A_1 \cap B \neq \emptyset$. Definim A_λ com la mitja de Minkowski dels dos conjunts $A_\lambda = (1-\lambda) A_0 + \lambda A_1$. Si $f(\alpha)$ és una funció ρ-còncava amb $\rho \geq -1/n$,* *llavors*

$$\int_{A_\lambda} f(\alpha)\, d\alpha \geq \left[(1-\lambda)\left(\int_{A_0} f(\alpha)\, d\alpha\right)^{\rho/1+n\rho} + \lambda\left(\int_{A_1} f(\alpha)\, d\alpha\right)^{\rho/1+n\rho}\right]^{1+n\rho/\rho}$$

Essencialment, aquest teorema dóna $\rho/(1+n\rho)$-cóncavitat de la integral de la funció de distribució a partir de la ρ-concavitat de $f(\alpha)$ i, per tant, permet conectar les suposicions amb el resultat al que volem arribar. La demostració d'aquest teorema no es tractarà en aquest treball, com tampoc es va fer en l'article de Caplin i Nalebuff.

Aquest teorema es relaciona amb el model mitjançant la funció de demanda. Quan una empresa i determina el preu del seu bé en funció dels preus de les altres empreses per tal que sigui la millor resposta possible a aquests, la regió d'integració de la funció de demanda (4.3), és a dir $\{\alpha : R_i(\alpha, \bar{x}, p_{-i}) \geq p_i\}$ depén només del propi preu. Per aplicar el resultat de Prékopa-Borell falta veure que el conjunt de consumidors que compren el bé x_i a un preu p_λ conté la mitja de Minkowski dels que compren el bé a p_0 i els que ho fan a p_1. Suposem que estem en un cas on s'ha fet la tria de característiques i de preus dels béns. El bé x_i es ven a un preu p_i i té una demanda definida per tots els consumidors que tenen un preu de reserva superior a p_i. Si agafem el consumidor que té el preu de reserva més alt de tots els consumidors que compren x_i que definim com p_1 i imposem $p_0 = p_i$ llavors veurem que si A_0 és el conjunt de consumidors que compren x_i a p_0 i A_1 el conjunt de consumidors que compren x_i a p_1 llavors $A_\lambda \subseteq \{\alpha : R_i(\alpha, \bar{x}, p_{-i}) \geq p_i\}$. Plantegem doncs un teorema que, usant els resultats obtinguts fins ara determinarà la concavitat de les funcions de demanda.

Teorema 4.8. *Considerem unes funcions d'utilitat que satisfan A1 i $f(\alpha)$ funció ρ-còncava en $\mathbb{R}^n$ en el seu suport convex B. Per a $\rho \geq -1/n$ totes les funcions de demanda son $\rho/(1+n\rho)$-còncaves sobre l'interval de preu (propi) on la demanda és estrictament positiva.*

Demostració: Notem primer que la demanda és, en general i en el nostre cas, una funció no negativa, per tant la condició de positiva indica només que és diferent de zero. Suposem que un consumidor de tipus α compra un bé x_i a un preu p_i i un consumidor tipus α' compra el mateix bé a un preu p_i' on $p_i' > p_i$, amb els altres béns a preus fixats p_{-i}. Veiem llavors que el bé x_i a un preu p_λ serà el preferit per els consumidors de tipus α^λ, on $\alpha^\lambda = (1-\lambda)\alpha + \lambda\alpha'$ i $p_\lambda = (1-\lambda)p_i + \lambda p_i'$ [3]. D'acord amb les suposicions fetes tenim que la funció d'utilitat dels consumidors tipus α per un bé i a preu p_i és major que la funció d'utilitat per un altre bé qualsevol. El mateix succeeix pels consumidors

[3] En la primera expressió el λ apareix com a superíndex perquè els subíndexs representaran els elements dels vectors $\alpha, \alpha', \alpha^\lambda$

tipus α' amb un preu p'_i pel bé i. Sigui j un bé qualsevol diferent de i

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k (x_i) + g (Y - p_i) t_{n+1} (x_i) + t_{n+2} (x_i) \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k (x_j) + g (Y - p_j) t_{n+1} (x_j) + t_{n+2} (x_j)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha'_k t_k (x_i) + g \left(Y - p'_i\right) t_{n+1} (x_i) + t_{n+2} (x_i) \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k t_k (x_j) + g (Y - p_j) t_{n+1} (x_j) + t_{n+2} (x_j)$$

Volem arribar a una expressió semblant a aquestes dues però amb α^λ. Per fer-ho, multipliquem la primera expressió per $(1-\lambda)$, la segona per λ i sumem de manera que es manté la desigualtat:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\lambda t_k (x_i) + \left[(1-\lambda) g (Y - p_i) + \lambda g \left(Y - p'_i\right)\right] t_{n+1} (x_i) + (1 - \lambda + \lambda) t_{n+2} (x_i) \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\lambda t_k (x_j) + [(1-\lambda) + \lambda] g (Y - p_j) t_{n+1} (x_j) + (1 - \lambda + \lambda) t_{n+2} (x_j) \geq$$

L'expressió es pot simplificar una mica en algunes parts però per acabar de trobar el resultat esperat, hem de recordar que, segons la suposició $A1$, g és una funció estrictament creixent i còncava. Llavors $g((1-\lambda) x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda) g(x_1) + \lambda g(x_2)$, que és directament la definició d'una funció còncava. Aplicant aquesta expressió amb les variables adequades obtenim

$$g \left((1-\lambda)(Y - p_i) + \lambda \left(Y - p'_i\right)\right) \geq (1-\lambda) g (Y - p_i) + \lambda g \left(Y - p'_i\right)$$

on

$$(1-\lambda)(Y - p_i) + \lambda \left(Y - p'_i\right) = Y - \lambda Y + \lambda Y - (1-\lambda) p_i - \lambda p'_i = Y - p_\lambda$$

Ajuntem les expressions i arribem a la inequació

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\lambda t_k (x_i) + g (Y - p_\lambda) t_{n+1} (x_i) + t_{n+2} (x_i) \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\lambda t_k (x_j) + g (Y - p_j) t_{n+1} (x_j) + t_{n+2} (x_j)$$

L'expressió final és la de dues funcions d'utilitat per a consumidors tipus α^λ tals que $U\left(\alpha^\lambda, x_i, Y - p_\lambda\right) \geq U\left(\alpha^\lambda, x_j, Y - p_j\right)$ i, per tant, el bé x_i és el preferit per aquests consumidors. $\square$

La funció de demanda ja està ben caracteritzada perquè hem vist que és contínua i té concavitat dèbil. A continuació es proposa un model per mostrar que els límits del Teorema 4.8 són bons.

Proposició 4.9. *Existeixen models de dimensió n que satisfan A1 amb una funció de densitat $f(\alpha)$ ρ-còncava en un conjunt convex, $\rho \geq -\frac{1}{n}$ i una funció de demanda*

$$D(p) = (1-p)^{\frac{1+n\rho}{\rho}}$$

Demostració: Per provar la proposició només cal presentar un model que compleixi les condicions demanades. Així doncs, sigui un model de duopoli on un consumidor tipus α tingui una funció d'utilitat $U(\alpha, \chi, z) = \alpha \cdot \chi + z$. El primer bé té característiques $(1, 1, ..., 1)$, el segon té $(0, 0, ..., 0)$ i la funció de densitat és $f(\alpha) = c\left(\sum \alpha_k\right)^{1/\rho}$. Si el preu del primer bé és $p_1 = 1$ observem que la funció del preu de reserva pel segon bé és $R_2(\alpha, \bar{x}, p_{-2}) = 1 - \sum \alpha_k$. Recordant la definició del preu de reserva, (eq 4.1) la funció anterior es correspon al segon cas ja que comparant les funcions d'utilitat del primer i el segon bé obtenim

$$\begin{aligned} U(\alpha, x_1, z_1) &= \sum \alpha_k + z_1 \\ U(\alpha, x_2, z_2) &= z_2 \end{aligned}$$

Com que estem en un duopoli, la funció de la millor alternativa al segon bé és

$$A_2(\alpha, \bar{x}, p_{-2}) = U(\alpha, x_1, Y - p_1) = \sum \alpha_k + Y - 1$$

fent que $z_2 = \sum \alpha_k + Y - 1$ es veu clarament que existeix una solució $U(\alpha, x_2, z_2) = A_2$ i la funció del preu de reserva queda determinada per

$$R_2(\alpha, \bar{x}, p_{-2}) = Y - z_2 = 1 - \sum \alpha_k$$

Podem calcular doncs, la demanda del segon bé

$$D_2(p_2) = \int_{\{\alpha : 1 - \sum \alpha_k \geq p_2\}} c\left(\sum \alpha_k\right)^{1/\rho} d\alpha$$

Aquesta integral es pot resoldre mitjançant un canvi de variable, $\sum \alpha_k = x$, llavors $dx = d\sum \alpha_k = \sum d\alpha_k$. Per arribar a $d\alpha = \prod d\alpha_k$ hem de veure que cada element del vector de preferències s'evalua de la mateixa manera en el conjunt d'integració $\{\alpha : \sum \alpha_k \leq 1 - p_2\}$. Llavors els diferencials $d\alpha_1, d\alpha_2, ..., d\alpha_n$ són equivalents i $d\alpha = \prod d\alpha_k = (d\alpha_i)^n$. Tornant al diferencial de x, ja el podem escriure en funció de α:

$$dx = \sum d\alpha_k = n \cdot d\alpha_i = n \cdot (d\alpha)^{1/n}$$

Aplicant els canvis a l'equació queda una integral més senzilla de resoldre:

$$\begin{aligned} D_2(p_2) &= c \int_{\{\alpha : x \leq 1 - p_2\}} (x)^{1/\rho} \frac{(dx)^n}{n^n} = c' \int_0^{1-p_2} x^{1/\rho} (dx)^n = \\ &= c'' \int_0^{1-p_2} x^{1/\rho} x^{n-1} dx = c''' (1-p_2)^{n+1/\rho} = (1-p_2)^{\frac{1+n\rho}{\rho}} \end{aligned}$$

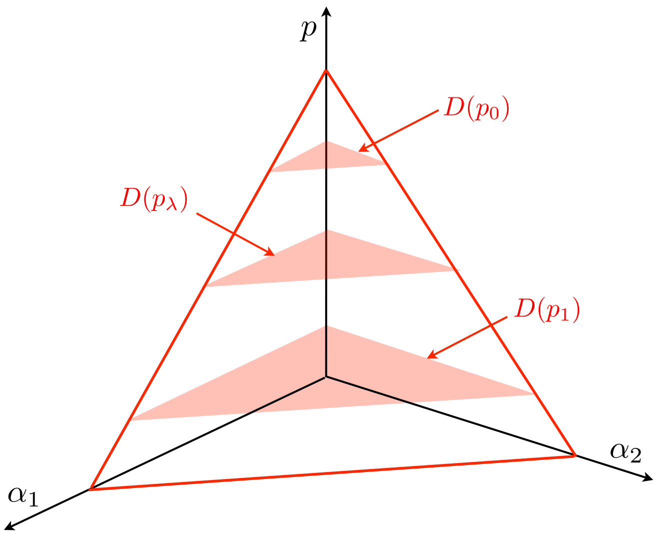

Figura 9: Demanda en funció del preu pel model de dupoli descrit en l'exemple 4.10.

c és una constant d'integració tal que $c''' = 1$. Com volíem demostrar, la funció de demanda del duopoli és de la forma que buscàvem. $\square$

Això demostra també que la concavitat del Teorema 4.8 és la màxima possible perquè en cas de suposar que garantís una concavitat més forta $\rho' > \rho/(1+n\rho)$ aquest model contradiria el resultat.

Exemple 4.10. Amb el model de la demostració de la proposició 4.9 de duopoli en un espai n-dimensional. Agafem $f(\alpha)$ una distribució uniforme de consumidors tal que $0 \leq \sum \alpha_k \leq 1$. Els dos béns tenen característiques $x_1 = (1,1,...,1)$ i $x_2 = (0,0,...,0)$. Els preus de reserva de la segona empresa si $p_1 = 1$ seran lineals $R_2(\alpha) = 1 - \sum \alpha_k$. Com que la distribució és uniforme, $f(\alpha)$ és ρ-còncava amb $\rho = \infty$ i pel Teorema 4.8 tenim que si $\rho = \infty$ llavors la funció de demanda serà $\rho/(1+n\rho) = 1/n$-còncava. Efectivament

$$D_2(p_2) = \int_{\{\alpha:1-\sum \alpha_k \geq p_2\}} d\alpha = (1-p_2)^n$$

mostrem el comportament de la demanda al llarg de dues de les característiques en funció del preu en la figura 9.

Podem observar que l'àrea de mercat d'un preu intermig p_λ és igual a la mitja de Minkowski de les àrees de mercat a p_0 i a p_1.

El següent pas és determinar el comportament de la funció de benefici utilitzant tot el que ja hem provat sobre la funció de demanda. Veurem que la funció de benefici és quasi-còncava, condició més dèbil que la concavitat que demanava Nash en la seva demostració d'existència d'equilibri, però que igualment ens permetrà utilitzar el teorema del punt fix de Kakutani.

Definició 4.11. *Sigui $f(x)$ una funció amb suport convex $B \subset \mathbb{R}^n$ es diu que és quasi-còncava si $\forall x_0, x_1 \in B$ i $\forall \lambda \in [0,1]$*

$$f(x_\lambda) \geq \min\{f(x_0), f(x_1)\}$$

on $x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ [16]. La convexitat de la correspondència deriva de la proposició següent:

Proposició 4.12. *La funció de benefici d'una empresa és quasi-còncava en el seu preu si $D(p)^{-1} = \frac{1}{D(p)}$ és convexa i $D(p)$ és decreixent amb p quan $D(p) > 0$.*

Demostració: Suposem que la funció de benefici és de la forma $\pi(p) = D(p)(p-c)$ (notem que es pren un cost de producció constant o, almenys, que no depén de p). Estudiant la funció per a preus superiors al cost de producció, veiem que si la funció no és quasi-còncava, $\exists\lambda \in [0,1]$ tal que $\pi(p_\lambda) \leq \min\{\pi(p_0), \pi(p_1)\}$. Aquesta desigualtat es pot separar en dos parts i substituint la funció de benefici per la seva expressió obtenim

$$(p_0 - c)D(p_0) > (p_\lambda - c)D(p_\lambda)$$
$$(p_1 - c)D(p_1) > (p_\lambda - c)D(p_\lambda)$$

Dividint la primera expressió per $D(p_0)D(p_\lambda)$ i la segona per $D(p_1)D(p_\lambda)$, multiplicant la primera per $(1-\lambda)$ i la segona per λ i sumant s'arriba a

$$\frac{(1-\lambda)(p_0-c) + \lambda(p_1-c)}{D(p_\lambda)} > \frac{(1-\lambda)(p_\lambda-c)}{D(p_0)} + \frac{\lambda(p_\lambda-c)}{D(p_1)}$$
$$\frac{1}{D(p_\lambda)} > \frac{(1-\lambda)}{D(p_0)} + \frac{\lambda}{D(p_1)}$$

Això implica que $\frac{1}{D(p)}$ no és convexa, per tant proposició queda demostrada per contra-recíproc. Observem que, en el cas $D(p_i) = 0$, la segona suposició seria certa si $p_\lambda < c$, cosa que també porta a una contradicció. $\square$

La quasi-concavitat però no surt directament de la proposició 4.12, s'ha de veure que, utilitzant els resultats obtinguts, les funcions de benefici compleixen les hipòtesis de la proposició.

Proposició 4.13. *Sota A1 i A2 les funcions de benefici de les empreses són quasi-còncaves en el seu preu.*

Demostració: Utilitzant els resultats de la proposició 4.12 tenim que la funció de benefici és quasi-còncava quan la funció de demanda és positiva i $\frac{1}{D(p)}$ és convexa, hem de veure que les suposicions $A1$ i $A2$ són suficients per què les funcions de benefici siguin quasi-còncaves.

Observem que la condició que $\frac{1}{D(p)}$ sigui convexa és equivalent a que $D(p)$ sigui ρ-còncava pel seu preu amb $\rho = -1$. $D(p)$ és -1-còncava si i només si

$$D(p_\lambda) \geq \left[(1-\lambda) D(p_0)^{-1} + \lambda D(p_1)^{-1}\right]^{-1}$$
$$\frac{1}{D(p_\lambda)} \leq \frac{(1-\lambda)}{D(p_0)} + \frac{\lambda}{D(p_1)}$$

Llavors, a partir del teorema 4.8 sabem que la $\rho/(1+n\rho)$-còncavitat de la funció de demanda prové de la ρ-còncavitat de la funció de distribució $f(\alpha)$ quan estem sota les suposicions $A1$. Llavors només necessitem veure que

$$\rho/(1+n\rho) = -1$$

aïllant, trobem que $\rho = -1/(n+1)$ que és precisament el que suposem amb $A2$ i per tant queda demostrada la proposició. $\square$

Amb aquesta última proposició hem reunit les eines necessàries per encarar el teorema principal.

Demostració del **Teorema 4.1:** Només farem la demostració pel cas en que no hi ha dos béns equivalents. Definim la correspondència de la millor resposta del model com

$$P = [\hat{p}_1(p_{-1}), ..., \hat{p}_m(p_{-m})]$$

que assigna a cada empresa el preu que és la millor resposta donats els preus dels altres béns. La correspondència es troba en el conjunt compacte $Z = \prod_i [c_i, Y]$ ja que els preus dels béns es restringeixen a $c_i \leq p_i \leq Y$.

$$P : Z \longrightarrow Z$$
$$(p_1, ..., p_m) \to (\hat{p}_1(p_{-1}), ..., \hat{p}_m(p_{-m}))$$

Fent que els preus dels productes siguin superiors als costos de producció s'evita que cap empresa tingui un benefici negatiu. Fent que $p_i \leq Y$ s'aconsegueix que no hi hagi béns i empreses irrellevants. En efecte, si $p_i > Y$, ens trobem en una situació on l'empresa no té cap consumidor potencial perquè el preu del bé és superior al preu de reserva de tots els consumidors. És una situació on l'empresa té demanda zero i es podria continuar treballant com si no existís. Per tant aquestes restriccions no ens estant restant generalitat en la demostració.

Si caracteritzem adequadament aquesta correspondència podrem aplicar el Teorema del punt fix de Kakutani. Es pot observar que, tal com està definida la correspondència de la millor resposta P, un punt fix serà un equilibri de Nash. Sabem que P assigna

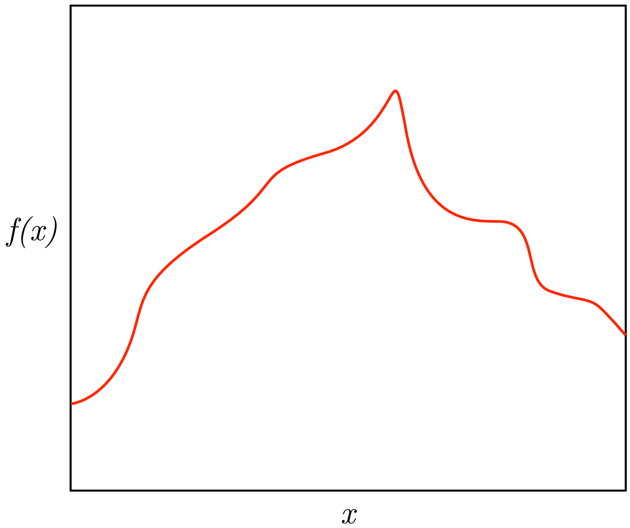

Figura 10: Exemple de funció quasi-còncava

a cada empresa el preu que maximitza el seu benefici donat un perfil de preus de les altres empreses. Llavors un punt fix serà el cas on la millor resposta $\hat{p}_i(p_{-i})$ coincideix amb el perfil de preus, per tant és una situació on totes les empreses estan en un màxim de la seva funció de benefici i no tenen cap incentiu per variar el seu preu. És a dir, hi ha un equilibri de Nash. Per poder aplicar Kakutani veurem que la correspondència és convexa i superiorment hemi-contínua.

Com que les funcions de benefici són quasi-còncaves en el preu, el signe del seu pendent només canviarà una vegada (veure figura 10). Pot haver-hi però, parts on la funció sigui horitzontal i sabem que s'assolirà el màxim en algun punt de la funció. Aquest màxim pot correspondre a un sol punt o bé a un interval. Observant l'exemple de funció de la figura 10, veiem que la quasi-concavitat és efectivament una condició més fluixa que la concavitat però tot i així és condició suficient per a l'existència de l'equilibri en aquest model. Una funció amb dos màxims aïllats no és una funció quasi-còncava perquè l'existència d'un punt x_λ situat entre dos punts x_0 i x_1 tals que $x_\lambda < x_0, x_\lambda < x_1$ es contradiu directament amb la definició de quasi-concavitat. A l'hora d'escollir els preus de millor resposta s'escolliran a partir dels màxims de la funció de benefici i, per tant, els valors de la correspondència seran convexos ja que provindran d'un punt o un interval.

Definició 4.14. *Una correspondència $\Gamma : A \to B$ es diu que és superiorment hemi-contínua en un punt a si per tot entorn obert V de $\Gamma(a)$ existeix un altre entorn U de a tal que $\forall x \in U$, $\Gamma(x)$ és un subconjunt de V.*

[17]Resulta difícil comprovar la hemi-continuitat a partir de la definició, serà millor doncs utilitzar un resultat del teorema del gràfic tancat.

Teorema 4.15 (Teorema del graf tancat). *Sigui $\Gamma : A \to B$ una correspondència i $Gr(\Gamma) = \{(a,b) \in A \times B : b \in \Gamma(a)\}$ el seu gràfic. Γ és superiorment hemi-contínua i $\Gamma(A)$ és un compacte si i només si el gràfic és tancat.*

$P : Z \to Z$ és la correspondència de la millor resposta i $P(Z) = Z$ és un compacte com ja hem vist abans. El gràfic de P és tancat si el conjunt $\{(x,y), y \in P(x)\}$ compleix que per totes les succesions $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ tals que $x_n \to x$, $y_n \to y$ i $y_n \in P(x_n)$ es té que $y \in P(x)$. Això deriva de la continuitat de les funcions de benefici que són les que donen els preu de millor resposta. Hem reunit les condicions necessàries per poder aplicar el Teorema del punt fix de Kakutani.

Teorema 4.16 (Teorema de Kakutani). *Sigui Γ una correspondència superiorment hemi-contínua, convexa, en un subconjunt no-buit, convex i compacte d'un espai euclidià, té almenys un punt fix.*

Per tant la correspondència de la millor resposta (que és una funció multivaluada) té un punt fix que determina una estratègia pura per a cada empresa tal que hi ha un equilibri de Nash. $\square$

4.3 Aplicació a un cas 2-dimensional

El plantejament de models matemàtics a partir de 1991 guanya força gràcies al resultat de Caplin-Nalebuff i obre les portes a noves ampliacions del model de Hotelling a més d'una dimensió, ja que l'existència de l'equilibri està garantida.

En aquest context s'ha de parlar de l'article de Irmen i Thisse on fan un anàlisi d'un model tipus Hotelling de competició espacial en n dimensions [12]. El model que presentem a continuació és, essencialment el model per a $n = 2$.

Presentem doncs un model de competició espacial en dues dimensions. Siguin A i B dues empreses en un espai $Q = [0,1] \times [0,1]$ que és un quadrat de $\mathbb{R}^2$, els vectors $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$ determinen les localitzacions de les dues empreses i p_A i p_B són els preus que dicten les empreses per als béns a i b. Suposem una distribució uniforme i contínua de consumidors sobre Q d'acord amb una funció de densitat $f(x)$ de manera que $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx = 1$. La funció d'utilitat dels consumidors és llavors

$$U_A(x, z_A) = -\|x - a\|^2 + Y - p_A$$
$$U_B(x, z_B) = -\|x - b\|^2 + Y - p_B$$

on $x = (x_1, x_2)$ és la posició d'un consumidor qualsevol i

$$\|x - a\|^2 = \left(\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}\right)^2$$

Les altres suposicions no canvien respecte el model de Hotelling lineal: el cost de producció es suposa nul per a les dues empreses, cada empresa produeix un únic bé i cada consumidor compra un únic bé d'acord amb quin maximitza la seva utilitat. El model també segueix sent de dues etapes, la primera és la tria de posició i la segona és la tria de preus. Les dues empreses fan les seves decisions simultàniament a cada etapa. Llavors la demanda de l'empresa A prové del conjunt de consumidors que prefereixen comprar el bé a que el bé b.

$$D_A = \int_{\{x:U_A(x)\geq U_B(x)\}} f\left(x\right) dx \tag{4.4}$$

Si volem expressar la demanda en funció del preu de reserva, per similitud amb el model de Caplin-Nalebuff, hem de definir primer el preu de reserva per a aquest model:

$$R_A\left(x,a,b,p_B\right) = \begin{cases} Y & \text{si } U_A\left(x,0\right) \geq U_B\left(x, Y - p_B\right) \\ Y - z_A & \text{si existeix una solució } U_A\left(x,z_A\right) = U_B\left(x, Y-p_B\right) \end{cases}$$

Aquesta funció de reserva consta només de dos casos i això és perquè en aquest model $g\left(z\right) = z$. Com que $g\left(z\right)$ és una funció creixent i el màxim de la funció és infinit, no pot donar-se el tercer cas de la funció del preu de reserva (4.1). En ser un duopoli la funció de la millor alternativa A_i passa a ser la utilitat del segon bé. La demanda doncs, també es pot definir a partir del preu de reserva.

$$D_A\left(p_A\right) = \int_{\{x:R_A(x)\geq p_A\}} f\left(x\right) dx$$

Es pot comprovar que aquesta expressió porta al mateix resultat que 4.4 veient que per als dos casos del preu de reserva obtenim la mateixa condició:

$$R_A\left(x\right) \geq p_A \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} Y \geq p_A & \text{si } U_A\left(x,0\right) \geq U_B\left(x,p_A - p_B\right) \Leftrightarrow U_A\left(x, Y-p_A\right) \geq U_B\left(x, Y-p_B\right) \\ Y - z_A \geq p_A & \text{si } U_A\left(x,z_A\right) = U_B\left(x,Y - p_B\right) \Leftrightarrow U_A\left(x, Y-p_A\right) \geq U_B\left(x, Y-p_B\right) \end{cases}$$

Sabem que existeix un equilibri en aquest model perquè precisament està dins del marc teòric presentat anteriorment. Específicament, la funció d'utilitat és de la forma de la suposició $A1$ i la distribució de consumidors és de la forma de la suposició $A2$. A més, encara que no s'ha tractat en aquest treball, l'article de Caplin i Nalebuff continua, després de la demostració de l'existència d'equilibri, donant condicions perquè l'equilibri sigui únic donades unes localitzacions de les empreses.

Amb el model ben definit, procedim a trobar un equilibri de Nash. Podem plantejar l'equació dels consumidors indiferents entre A i B que definirà un hiperplà de $\mathbb{R}^2$, és a dir, una recta. Aquesta recta determinarà el conjunt de consumidors indiferents i, per tant, serà la separació entre la demanda d'A i la demanda de B. Igualem les utilitats dels consumidors i desenvolupem l'equació s'obté

$$\begin{aligned}
\|x-a\|^2+p_A &= \|x-b\|+p_B \\
x^2-2xa+|a|^2+p_A &= x^2-2xb+|b|^2+p_B \\
2x(b-a) &= |b|^2-|a|^2+p_B-p_A \\
x_1\cdot(b_1-a_1)+x_2\cdot(b_2-a_2) &= \frac{1}{2}\left(b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+p_B-p_A\right) \\
\tilde{x}_2 &= \frac{c-\tilde{x}_1(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}
\end{aligned}$$

Obtenim l'equació d'una recta on $c=\frac{1}{2}\left(b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+p_B-p_A\right)$ i suposem que $b_2 \neq a_2$ perquè estigui ben definida. Com que en general es suposa que a i b són diferents (en el cas que siguin iguals el model es redueix al model de Bertrand explicat a la secció 2.4) es compleix $a_1 \neq b_1$ o bé $a_2 \neq b_2$. Observem que si només tenim que $a_1 \neq b_1$ llavors podem canviar els eixos per tal que $a_2 \neq b_2$. A continuació imposem $a_i \leq b_i$. Fent això tampoc perdem generalitat perquè, donades dues posicions, si $a_i > b_i$ podem invertir l'eix en qüestió i obtenim un problema equivalent que compleix $a_i \leq b_i$.

A continuació determinem en quin eix (o en quina característica) els béns estan més diferenciats; és a dir si $(b_1-a_1)<(b_2-a_2)$ o al revés. Suposem que es dóna el cas presentat i procedim al càlcul de la demanda d'A sabent que que $D_B=1-D_A$. Direm que la segona característica és la dominant i la primera és la dominada. Calculem la demanda de A

$$\begin{aligned}
D_A &= \int_0^1\int_0^{\tilde{x}_2} dx_1dx_2 = \int_0^1 \tilde{x}_2 dx_1 = \int_0^1 \frac{c-\tilde{x}_1(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}dx_1 = \\
&= \frac{c-\frac{1}{2}(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)} = \frac{b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+p_B-p_A-(b_1-a_1)}{2(b_2-a_2)}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Veiem que aquesta demanda depén linealment dels preus, i estarà ben definida sempre que $0 \leq D_A \leq 1$

Com s'ha mencionat anteriorment sabem que existeix un únic parell de preus que formen un equilibri de Nash donades unes localitzacions. Suposem doncs que la primera etapa ja s'ha fet i les empreses han fixat les seves posicions a, b. Llavors trobem els preus d'equilibri recordant que p_A és un màxim de la funció de benefici quan $p_B=p_B^*$ sii $p_A=p_A^*$. El mateix raonament s'aplicarà a p_B.

Les funcions de benefici són la demanda multiplicada pel preu del bé:

$$\begin{aligned}
\pi_A(p_A,p_B) &= p_AD_A \\
\pi_B(p_A,p_B) &= p_BD_B = p_B(1-D_A)
\end{aligned}$$

Plantegem doncs $\left.\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A,p_B^*\right)\right)}{\partial p_A}\right|_{p_A=p_A^*}=0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A,p_B^*\right)\right)}{\partial p_A} &= \frac{b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+p_B^*-p_A-(b_1-a_1)}{2\,(b_2-a_2)}-\frac{p_A}{2\,(b_2-a_2)}=0\\
0 &= \frac{b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+p_B^*-2p_A^*-(b_1-a_1)}{2\,(b_2-a_2)}\\
2p_A^* &= p_B^*+b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2-(b_1-a_1)
\end{aligned}$$

La segona equació llavors és $\left.\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*,p_B\right)\right)}{\partial p_B}\right|_{p_B=p_B^*}=0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*,p_B\right)\right)}{\partial p_B} &= 1-\frac{b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+p_B-p_A^*-(b_1-a_1)}{2\,(b_2-a_2)}-\frac{p_B}{2\,(b_2-a_2)}=0\\
1 &= \frac{b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+2p_B^*-p_A^*-(b_1-a_1)}{2\,(b_2-a_2)}\\
p_A^* &= 2p_B^*+b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2-(b_1-a_1)-2\,(b_2-a_2)
\end{aligned}$$

Obtenim doncs un sistema de dues equacions que permet obtenir expressions de p_A^* i p_B^* en funció de les posicions a i b.

$$p_A^* = \frac{1}{3}\left(b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2-(b_1-a_1)+2\,(b_2-a_2)\right) \tag{4.6}$$

$$p_B^* = \frac{1}{3}\left(a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2+b_1-a_1+4\,(b_2-a_2)\right) \tag{4.7}$$

Passem a l'estudi de la funció de benefici amb el parell de preus d'equilibri fixat (p_A^*,p_B^*) i estudiem el comportament en funció de la posició de les empreses per trobar l'equilibri de la localització. Les funcions de benefici de les dues empreses són

$$\begin{aligned}
\pi_A\left(p_A^*,p_B^*\right) &= p_A^*\left(\frac{b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+p_B^*-p_A^*-(b_1-a_1)}{2\,(b_2-a_2)}\right)=\\
&= \frac{1}{18}\frac{\left(b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2-(b_1-a_1)+2\,(b_2-a_2)\right)^2}{(b_2-a_2)}\\
\pi_B\left(p_A^*,p_B^*\right) &= p_B^*\left(1-\frac{b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2+p_B^*-p_A^*-(b_1-a_1)}{2\,(b_2-a_2)}\right)=\\
&= \frac{1}{18}\frac{\left(a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2+b_1-a_1+4\,(b_2-a_2)\right)^2}{(b_2-a_2)}
\end{aligned}$$

Calculem ara les derivades parcials respecte de la posició en cada eix. Per reduir el volum dels càlculs definim

$$\begin{aligned}
E &= b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2-b_1+a_1+2\,(b_2-a_2)\\
F &= a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2+b_1-a_1+4\,(b_2-a_2)
\end{aligned}$$

Llavors la parcial del benefici d'A respecte d'a_1 és:

$$\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial a_1}=\frac{1}{18}\frac{2E\left(-2a_1+1\right)}{\left(b_2-a_2\right)}$$

on E i F són funcions positives. Per tant, si $a_1 < 1/2$, $\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial a_1} > 0$ i si $a_1 > 1/2$, $\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial a_1} < 0$ l'empresa A tendeix a desplaçar-se cap el centre del primer eix, la qual cosa que indica que $a_1^* = 1/2$ serà el primer terme d'a^*. En canvi, la parcial del benefici respecte d'a_2

$$\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial a_2}=\frac{1}{18}\frac{E\left(2\left(-2a_2-2\right)\left(b_2-a_2\right)+E\right)}{\left(b_2-a_2\right)^2} \tag{4.8}$$

Per veure quin és el signe de la derivada estudiem la part superior de la divisió tenint en compte que sabem que $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$ i $\left(b_1-a_1\right) < \left(b_2-a_2\right)$. Llavors

$$2\left(-2a_2-2\right)\left(b_2-a_2\right)+E=b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2-b_1+a_1-2\left(2a_2+1\right)\left(b_2-a_2\right)$$

de manera que podem trobar una cota superior si ho agrupem en diferents termes, el primer terme és

$$b_1^2-a_1^2-b_1+a_1=\left(b_1+a_1-1\right)\left(b_1-a_1\right)<\left(b_1-a_1\right)$$

i el segon terme

$$b_2^2-a_2^2-2\left(2a_2+1\right)\left(b_2-a_2\right)=\left(-2-3a_2+b_2\right)\left(b_2-a_2\right)\leq-\left(b_2-a_2\right)$$

s'obté finalment que

$$\frac{\partial\left(\pi_A\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial a_2}<c\left(\left(b_1-a_1\right)-\left(b_2-a_2\right)\right)<0$$

i per tant a_2 tendeix a 0. Llavors el punt $a^* = (1/2, 0)$ serà una localització d'A que li suposarà el màxim benefici.

Fent els càlculs per l'empresa B

$$\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial b_1}=\frac{1}{18}\frac{2F\left(-2b_1+1\right)}{\left(b_2-a_2\right)}$$

la parcial respecte de b_1 dóna una expressió equivalent a la parcial del benefici d'A respecte d'a_1; llavors $b_1^* = 1/2$ és una posició d'equilibri. Derivant respecte de b_2 obtenim una expressió de la forma

$$\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*, p_B^*\right)\right)}{\partial b_2}=\frac{1}{18}\frac{F\left(2\left(-2b_2+4\right)\left(b_2-a_2\right)-F\right)}{\left(b_2-a_2\right)^2} \tag{4.9}$$

amb

$$2\left(-2b_2+4\right)\left(b_2-a_2\right)-F=4\left(1-b_2\right)\left(b_2-a_2\right)+b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2-b_1+a_1$$

agrupant els termes adequadament trobem que

$$4\left(1-b_2\right)\left(b_2-a_2\right)+b_2^2-a_2^2=\left(4-3b_2+a_2\right)\left(b_2-a_2\right)\geq\left(b_2-a_2\right)$$
$$b_1^2-a_1^2-b_1+a_1=\left(b_1+a_1-1\right)\left(b_1-a_1\right)>-\left(b_1-a_1\right)$$

Substituint en l'equació obtenim finalment que $\frac{\partial\left(\pi_B\left(p_A^*,p_B^*\right)\right)}{\partial b_2}>0\ \forall b_2\in[0,1]$ i, per tant, suposarà un màxim del benefici quan $b_2^*=1$. Hem trobat doncs la parella de localitzacions $(a^*,b^*)=\left((1/2,0),(1/2,1)\right)$ que maximitzen el benefici d'ambdues empreses donats uns preus que formen un equilibri de Nash del subjoc de competició de preus. El perfil d'estratègies $\left[\left(a^*,p_A^*\right),\left(b^*,p_B^*\right)\right]$ és un equilibri de Nash del model.

5 Conclusions

En aquest treball de final de grau s'ha fet un estudi dels models de competició de dues empreses i de l'existència d'un equilibri d'estratègies pures de Nash per a aquests.

S'ha analitzat el model lineal de Hotelling, trobant les condicions necessàries per a l'equilibri que Hotelling va passar per alt quan va definir el «principi de mínima diferenciació».

S'ha descrit el model modificat de Hotelling amb una funció de cost de transport quadràtic, demostrant que garanteix l'existència d'un equilibri i, per tant, evita els problemes associats al model inicial de Hotelling.

S'ha revisat el treball de Caplin i Nalebuff on demostren l'existència d'un equilibri de Nash d'estratègies pures sota dues hipòtesis:

- les funcions d'utilitat són lineals en les característiques del consumidor,
- la distribució de consumidors és ρ-còncava amb $\rho = -1/(n+1)$, on n és la dimensió de l'espai de característiques.

Un dels objectius principals del treball ha estat fer més accessible l'article de Caplin i Nalebuff, ja que seguir els conceptes i arguments plantejats en aquest és d'una dificultat considerable. Llavors s'ha fet una explicació de la primera part de l'article d'una manera una mica més clarificadora que en l'original. Així s'han proporcionat arguments més detallats per a les demostracions.

S'ha analitzat un model tipus Hotelling de competició espacial en dues dimensions i s'ha trobat l'equilibri de Nash corresponent.

Referències

[1] d'Aspremont, C.; Jaskold Gabszezwicz, J.; Thisse, J.-F.: On Hotelling's "Stability in Competition", *Econometrica,* 47, 1145-1150, 1979.

[2] Hotelling, H.: Stability in Competition, *Economic Journal,* 39, 41-57, 1929.

[3] Cournot, A.: *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses.* Paris: L. Hachette, 1838.

[4] Bertrand, J.L.F.: Théorie des Richesses: Revue de Théories Mathématiques de la Richesse Sociale par Léon Walras et Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses par Augustin Cournot, *Journal des Savants,* 67: 499-508, 1883

[5] Massó, J.: Les Aportacions de John F. Nash a l'economia: Equilibri i Negociació, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques,* 32, número 1, 2017.

[6] Prékopa, A.: Logarithmic Concave Measures with Applications to Stochastic Programming, *Acta Sci. Math.* (Szeged), 34, 335-343, 1971.

[7] Zermelo, E.: Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, *Proceedings of the International Fifth Congress of Mathematicians. Cambridge University Press*, 1913.

[8] Von Neumann, J.; Morgenstern, O.: *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press, 1944.

[9] Nash, John F.: *Non-Cooperative Games*, PhD thesis, Princeton University, 1950.

[10] Caplin, A.; Nalebuff, B: Aggregation and Imperfect Competition: On the Existence of Equilibrium, *Econometrica,* 59, 25-59, 1991.

[11] Borell, C.: Convex set Functions in d-Space, *Periodica Mathematica Hungarica*, 6, 111-136, 1975.

[12] Irmen, A.; Thisse, J.-F.: Competition in Multi-characteristics Spaces: Hotelling Was Almost Right, *Journal of Economic Theory,* 78, 76-102, 1998.

[13] De Frutos, M.A.; Hamoudi, H.; Jarque, X.: Equilibrium Existence in the Circle Model with Linear Quadratic Transport Cost, *Regional Science and Urban Economics,* 29, 605-615, 1999.

[14] Caplin, A.; Nalebuff, B: Aggregation and Social Choice: A Mean Voter Theorem, *Econometrica,* 59, 1-23, 1991.

[15] Kakutani, S.: A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem, *Duke Mathematical Journal,* 8, 457-459, 1941.

[16] Osborne, M. J.: *Quasiconcavity and Quasiconvexity*, University of Toronto Department of Economics, (https://mjo.osborne.economics.utoronto.ca/index.php/tutorial/index/1/qcc/t)

[17] Aliprantis, C. D.; Border, K. C.: *Infinite Dimensional Analysis: Hitchhiker's Guide*, 3a edició. Berlin: Springer, 2007.